1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

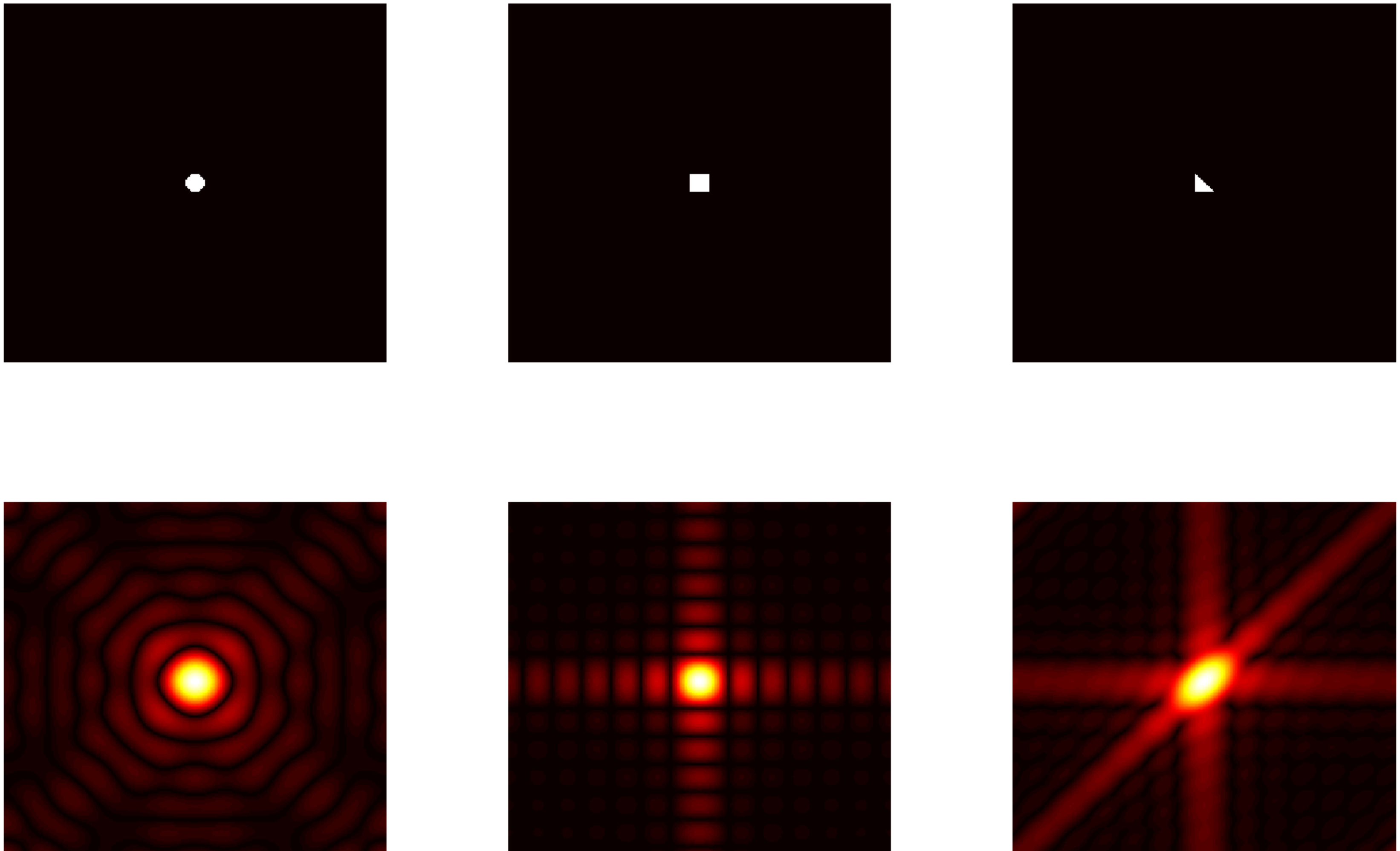
dr hab. Rafał Kasztelanic

Wykład 4

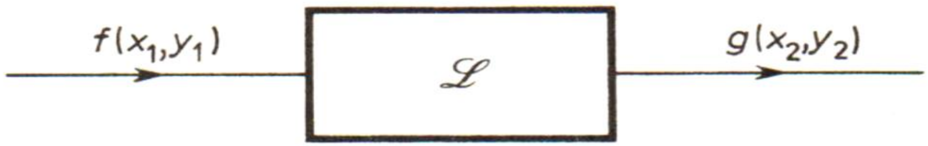
Układy liniowe

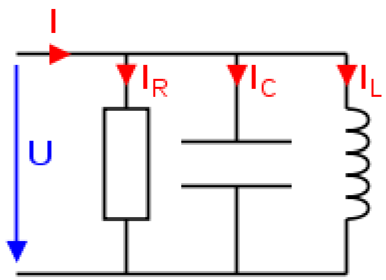
Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF(\nu_x, \nu_y) + bG(\nu_x, \nu_y)$$

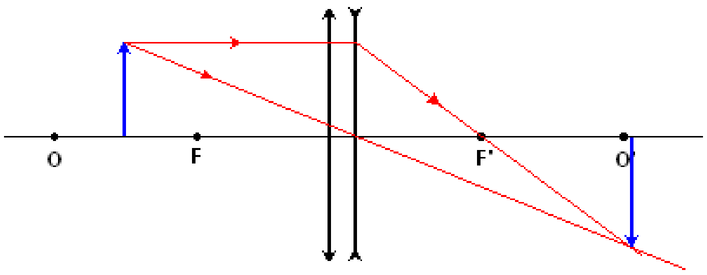


KoloKwadratTrojk.m, Cw7_1_2punkty.m



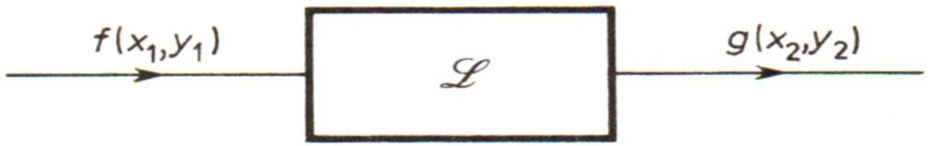


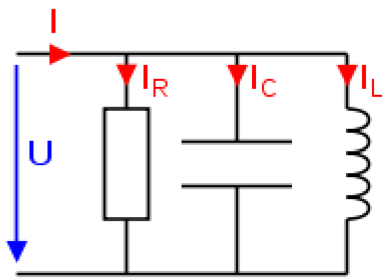
pl.wikipedia.org



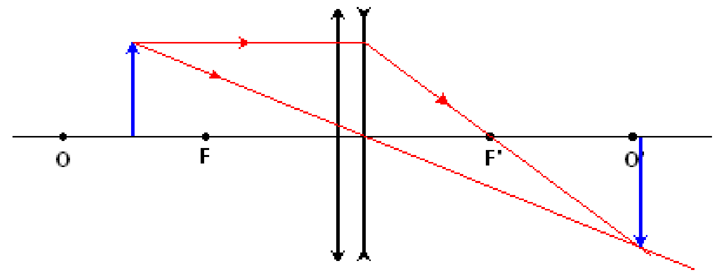
fizyka.edu.pl

Układy liniowe





pl.wikipedia.org



fizyka.edu.pl

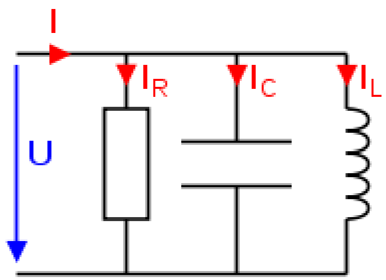
$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

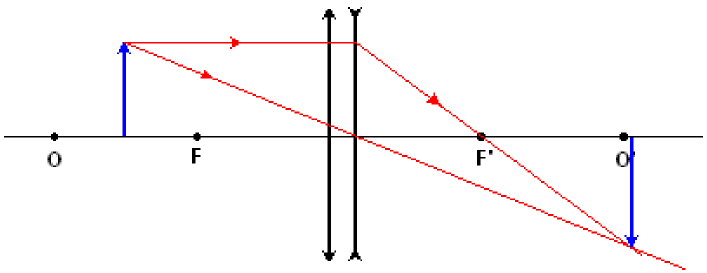
punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x_1 - x, y_1 - y)dxdy\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dxdy$$

Układy liniowe





pl.wikipedia.org

fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x_1 - x, y_1 - y)dxdy\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dxdy$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dxdy$$

Odpowiedź impulsowa

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dxdy$$

- Obraz punktu
- Plamka rozmycia (point-spread function)

- Obraz wyjściowy jest superpozycją obrazów poszczególnych punktów przedmiotu

- Funkcja *h* całkowicie charakteryzuje transformacyjne właściwości układu liniowego

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y)\, dxdy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y)\, dxdy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Z twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes h(x, y)\} = F(\nu_x, \nu_y)\underbrace{H(\nu_x, \nu_y)}_{\text{FUNKCJA PRZENOSZENIA UKŁADU}} = G(\nu_x, \nu_y)$$

$$H(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, dxdy$$

$H(\nu_x, \nu_y)$ jest filtrem częstości przestrzennych

Fala płaska

Z równań Maxwella:

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad rot\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$div\ \boldsymbol{D} = 0 \qquad div\ \boldsymbol{B} = 0$$

i równań materiałowych:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

i korzystając z tożsamości:

$$grad\ div - rot\ rot = \Delta$$

dostajemy równanie falowe:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

W postaci ogólnej:

$$\Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299792458\ \frac{m}{s}$$

Fala płaska

Zakładamy, że rozwiązaniem równania falowego:

$$\Delta \boldsymbol{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

jest fala monochromatyczna typu:

amplituda

częstość

faza

$$\lambda = \frac{\vartheta}{\nu}$$

prędkość

częstość

$$u(x,y,z,t) = a(x,y,z)\cos[2\pi\nu t + \varphi(x,y,z)]$$

$$u(x,y,z,t) = \frac{a(x,y,z)\{\exp[-i(2\pi\nu t + \varphi)] + \exp[i(2\pi\nu t + \varphi)]\}}{2}$$

Weźmy falę elektromagnetyczną w postaci:

$$u(x,y,z,t) = u(x,y,z)\exp[i2\pi\nu t]$$

Liczę drugi człon równania falowego:

$$\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\vartheta^2}(2\pi\nu)^2 u = (\frac{2\pi}{\lambda})^2 u = k^2 u$$

Czyli równanie falowe w postaci: $\Delta \boldsymbol{u} - k^2 \boldsymbol{u} = 0$ równanie Helmholtza

Fala płaska

Inne możliwe rozwiązania równania falowego:

fala monochromatyczna o określonym kierunku propagacji

$$u(x,y,z,t) = u(x,y,z)\exp[i(\beta z - \omega t)]$$

fala o określonej częstości

$$u(x,y,z,t) = u(x,y,z)\exp[i(\varphi(r) - \omega t)]$$

amplituda faza częstość kołowa

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$u(x,y,z,t) = \underbrace{a(x,y,z)exp\big(i\varphi(r)\big)}_{\text{amplituda zespolona}}\underbrace{\exp(-i\omega t)}_{\text{zależność od czasu}}$$

Fala płaska

Falę monochromatyczną mogę też zapisać jako:

$$u(x, y, z) = \mathrm{A}\exp[i(kr + \varphi)]$$

gdzie *k* jest wektorem falowym:

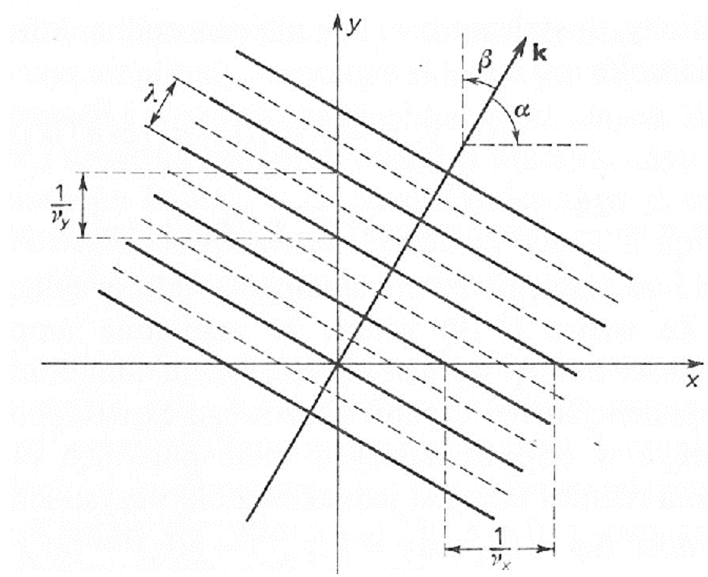
$$k = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}$$

a *r* jest odległością:

$$r = \vartheta \mathrm{t}$$

Definiujemy częstości przestrzenne:

$$\nu_x = \frac{cos\alpha}{\lambda} \qquad \nu_y = \frac{cos\beta}{\lambda}$$



Rozkład pola na fale płaskie

Dowolne pole może być przedstawione jako superpozycja (suma) fal monochromatycznych:

$$u(x,y,z,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_\nu(x,y,z)\exp[-i2\pi\nu t]$$

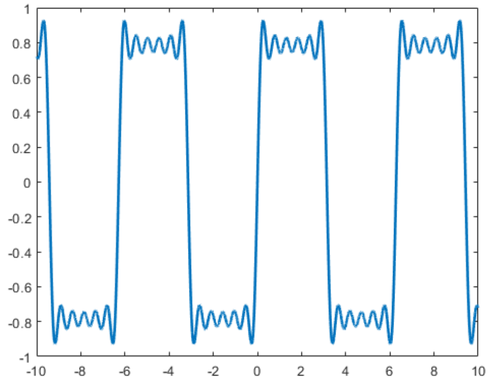
częstości przestrzenne:

$$\nu_x = \frac{cos\alpha}{\lambda} \qquad \nu_y = \frac{cos\beta}{\lambda} \qquad \lambda = \frac{\vartheta}{\nu}$$

$$\nu t = x\nu_x = x\frac{cos\alpha}{\lambda} = x\frac{cos\alpha}{\vartheta}\nu \quad \rightarrow \quad x = \frac{\vartheta t}{cos\alpha}$$

Transformata Fouriera:

$$F(\nu_x,\nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)exp[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, dx\, dy$$



Dowolne pole optyczne rozkładam za pomocą transformaty Fouriera na superpozycję fal monochromatycznych:

$$u(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\nu_x,\nu_x)exp[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, d\nu_x d\nu_y$$

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

Załóżmy, że znamy rozkład pola na fale monochromatyczne w płaszczyźnie z_0 .
Chcemy znaleźć rozkład pola w płaszczyźnie z_1.

Rozwiązaniem fala monochromatyczna:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z)\cos[2\pi\nu t]$$

$$\nu_x = \frac{cos\alpha}{\lambda} \quad \nu_y = \frac{cos\beta}{\lambda}$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

W kierunku propagacji:

$$cos\gamma = \sqrt{1 - cos^2\alpha + cos^2\beta} = \sqrt{1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2}$$

Aby znaleźć rozwiązanie podstawiam to do równania falowego:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\nu_x, \nu_x, z_1) + k^2[1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2]U(\nu_x, \nu_x, z_1)=0$$

Uzyskujemy:

$$U(\nu_x, \nu_x, z_1) = U_0(\nu_x, \nu_x)exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}\underline{\sqrt{1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2}z_1}\right]$$

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

dla: $\nu_x^2 + \nu_x^2 \le \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2 \ge 0$ - fala płaska rozprzestrzeniająca się

dla: $\nu_x^2 + \nu_x^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2 < 0$ - fala zanikająca, evanescentna (niejednorodna)

Funkcja przenoszenia:

$$H(\nu_x, \nu_x) = \frac{U(\nu_x, \nu_x, z_1)}{U_0(\nu_x, \nu_x)} = \begin{cases} exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - (\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2} z_1\right] & \text{dla: } \nu_x^2 + \nu_x^2 \le \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{dla: } \nu_x^2 + \nu_x^2 > \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

Propagację fali monochromatycznej w przestrzeni możemy interpretować jako proces filtracji dolnoprzepustowej. Pasmo przenoszenia równoważnego filtra jest ograniczone w płaszczyźnie częstości przestrzennym do koła o promieniu 1/λ. Fale, których częstości są wewnątrz tego koła przenoszone są bez zniekształceń lecz z przesunięciem fazowym.
Częstości z poza koła są tłumione i w odległości kilku λ nie są rejestrowane.

Prędkość fazowa, prędkość grupowa

Załóżmy, że mamy 2 fale monochromatyczne:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

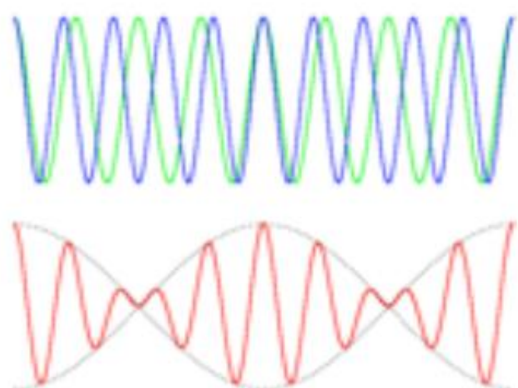
Prędkość fazowa – prędkość poruszania się punktów o tej samej fazie (fala monochromatyczna):

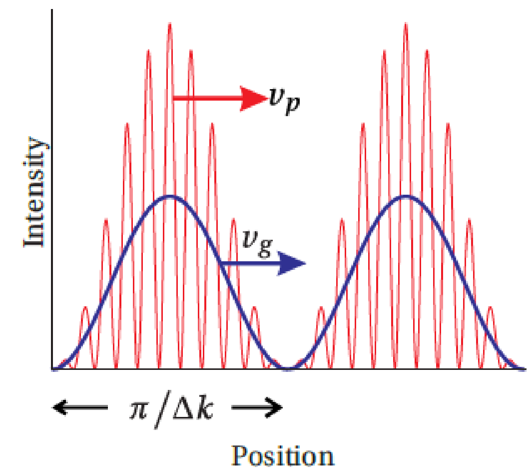
$$v_{p1} = \omega_1 / k_1 \qquad v_{p2} = \omega_2 / k_2 \qquad n = \frac{c}{v_p}$$

Prędkość grupowa – dla fal niemonochromatycznych, prędkość rozchodzenia się informacji, Rozchodzenia się obwiedni:

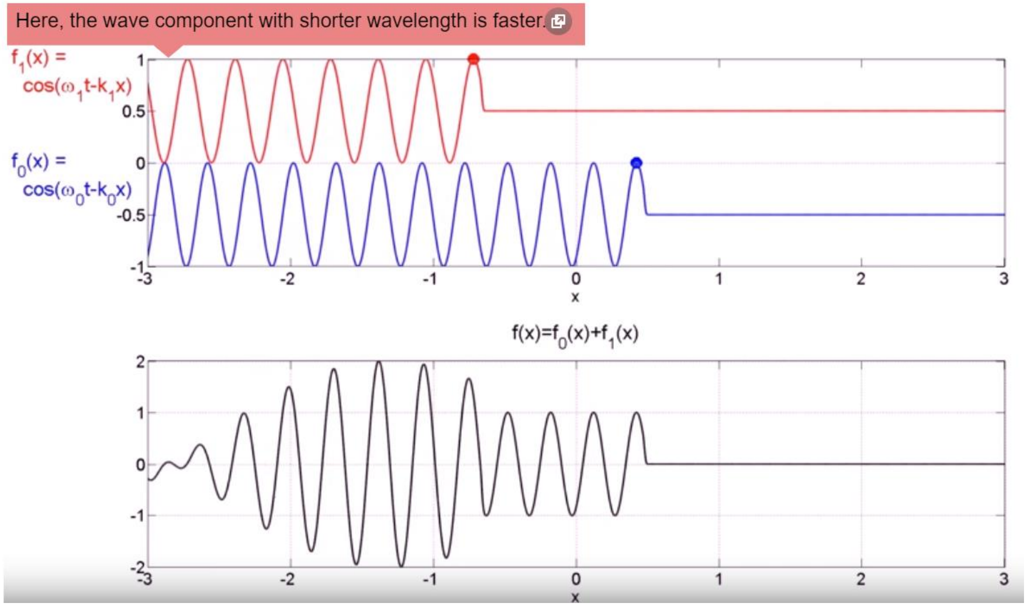
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$





Prędkość fazowa, prędkość grupowa

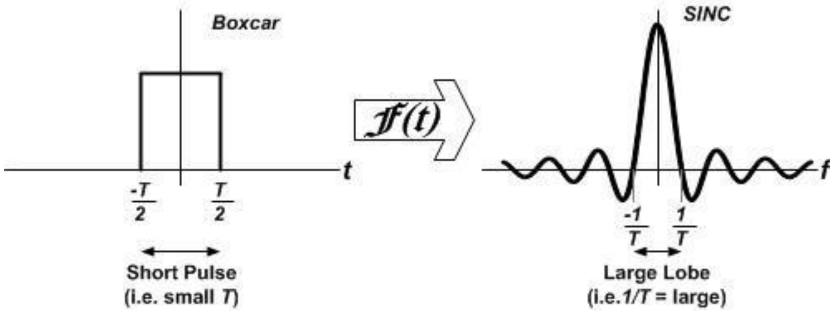


https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM

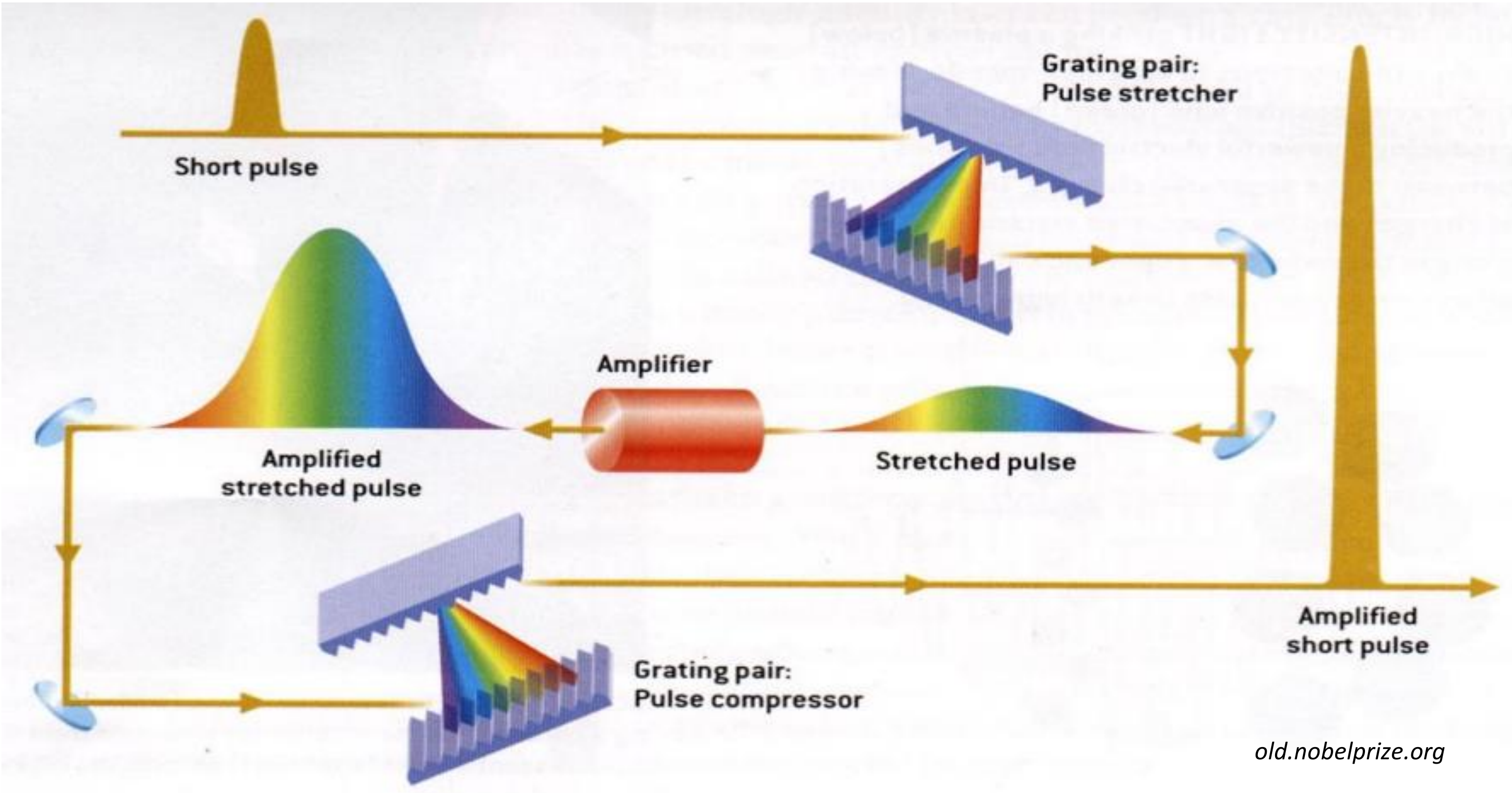
www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_3359660903&feature=iv&src_vid=ePJdV75fT5o&v=tlM9vq-bepA

Widmo krótkiego impulsu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$$

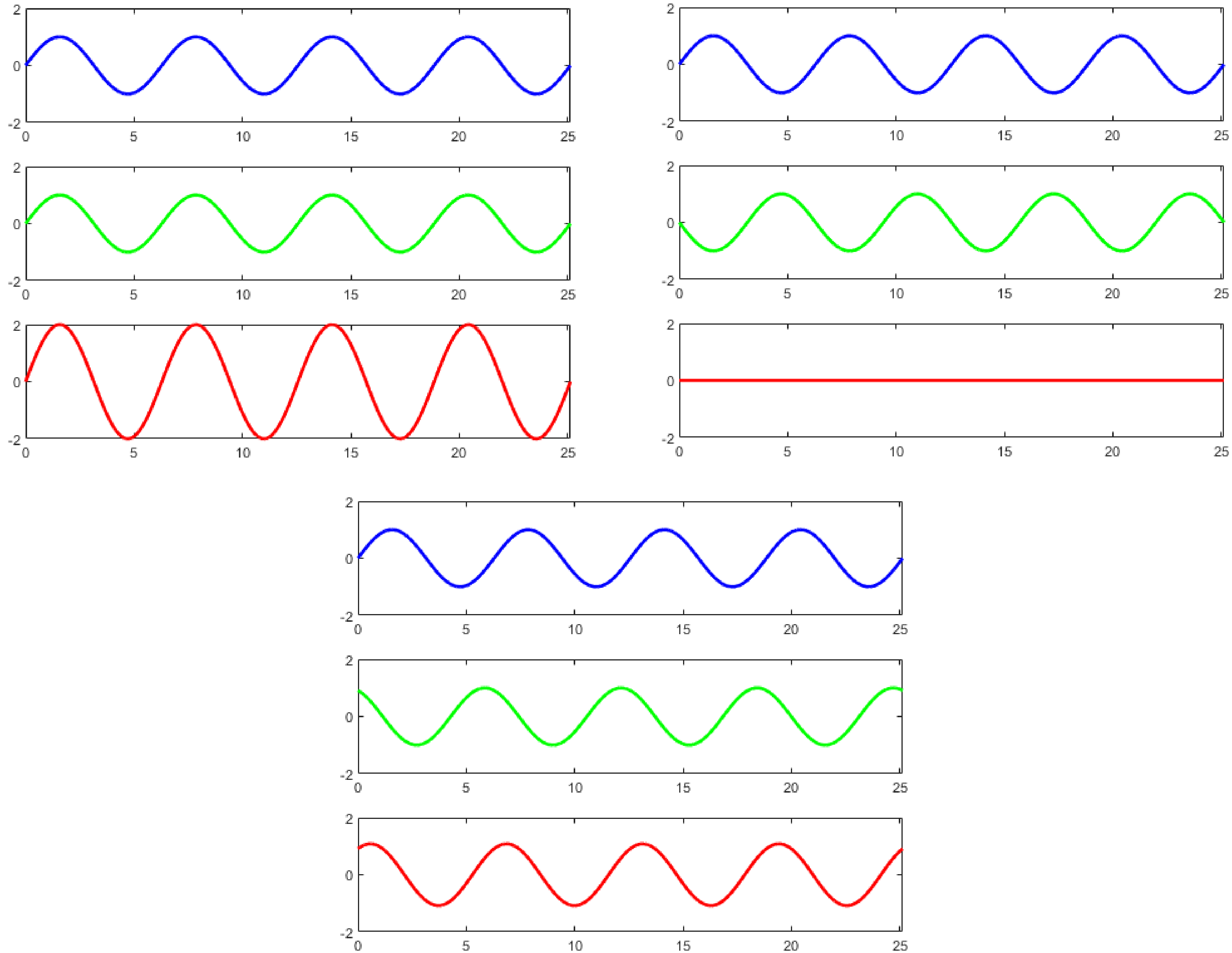


e2e.ti.com/blogs_/b/analogwire



old.nobelprize.org

Interferencja



Superpozycja.m