

1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

# WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

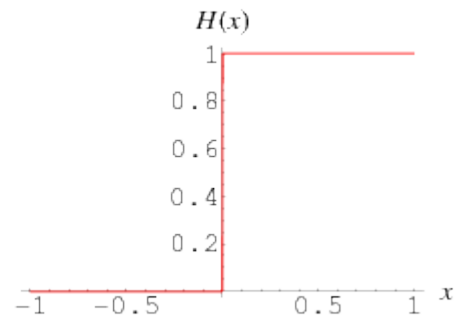
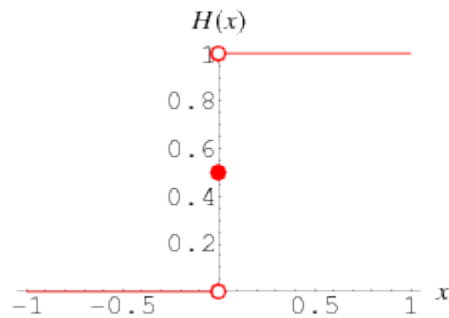
dr hab. Rafał Kasztelanic

- Funkcje specjalne
- Splot, korelacja, autokorelacja
- 2D transformata Fouriera
- Układy liniowe
  - odpowiedź impulsowa
  - funkcja przenoszenia
  - koherentne, niekoherentne
- Fala płaska
  - rozkład pola na fale płaskie
  - przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych
- Dyfrakcja
  - Fresnela
  - Fraunchofera
- Soczewka
  - soczewka jak element realizujący transformatę Fouriera
- Układy optyczny
  - układ optyczny jako filtr częstości przestrzennych
    - koherentne, niekoherentne
  - Korelator 4f
  - Realizacja korelacji i splotu
  - Rozpoznawanie obrazów
- Filtracja częstości przestrzennych
  - kontrast fazowy
  - rozpoznawanie obrazów
- Aberracje optyczne w ujęciu falowym
- Głębina ostrości
  - Soczewki wieloogniskowe

## Funkcja skokowa Heaviside'a

$$H[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \\ 1, & n > 0, \end{cases}$$

$$H[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0, \end{cases}$$



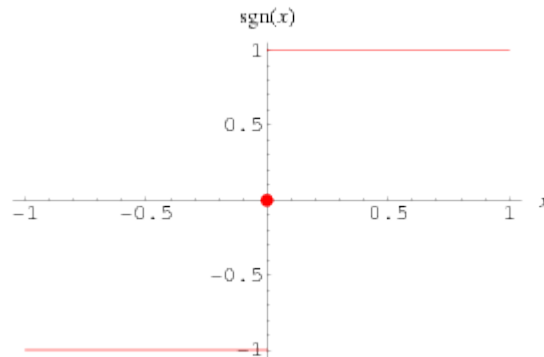
Krawędź

# Funkcje specjalne

Funkcja signum (funkcja znaku)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

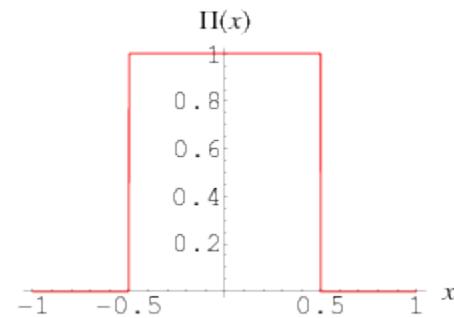
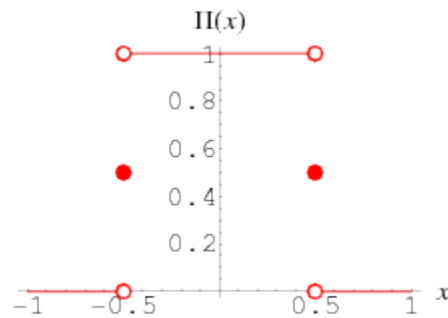


# Funkcje specjalne

## Funkcja prostokątna

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

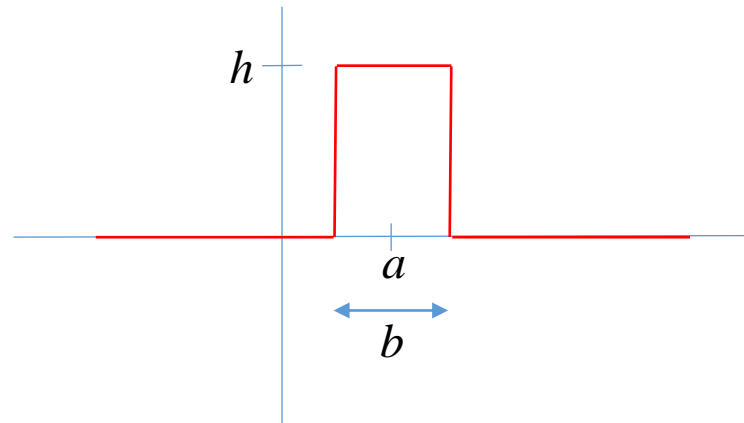


szczelina

# Funkcje specjalne

Funkcja prostokątna – przesunięta, przeskalowana

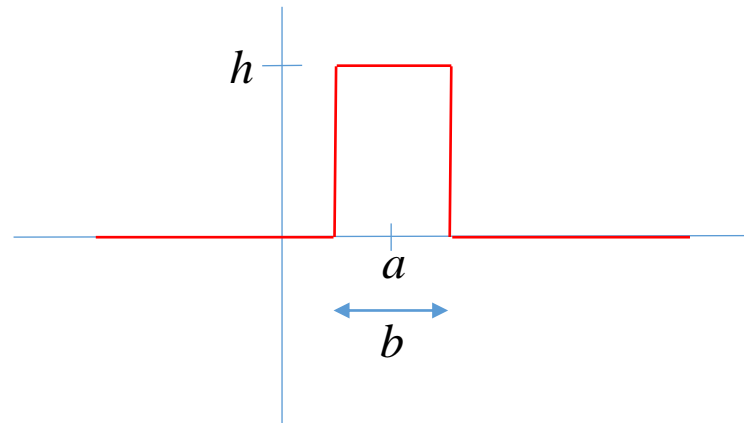
$$h \operatorname{rect}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} h & \left|\frac{x-a}{b}\right| \leq 1/2 \\ 0 & \left|\frac{x-a}{b}\right| > 1/2 \end{cases}$$



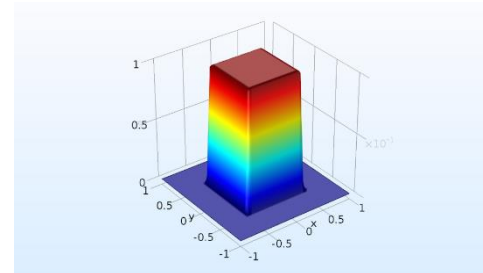
# Funkcje specjalne

Funkcja prostokątna – przesunięta, przeskalowana

$$h \operatorname{rect}\left(\frac{x-a}{b}\right) = \begin{cases} h & \left|\frac{x-a}{b}\right| \leq 1/2 \\ 0 & \left|\frac{x-a}{b}\right| > 1/2 \end{cases}$$



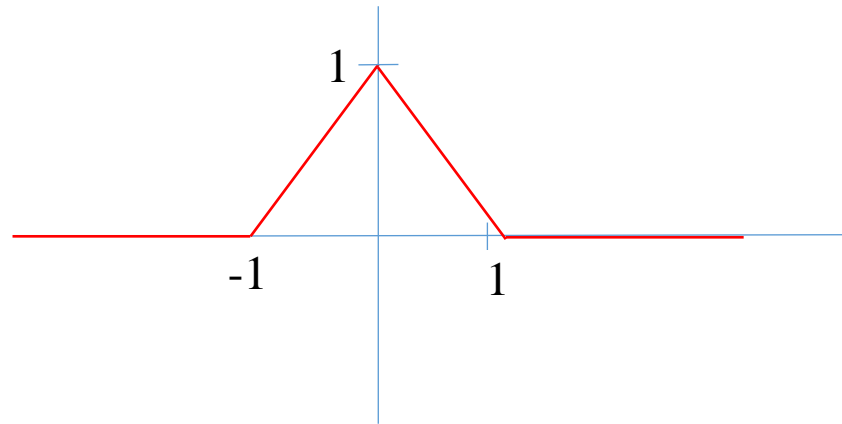
$$\operatorname{rect}(x, y) = \operatorname{rect}(x) \operatorname{rect}(y)$$



Otwór prostokątny

## Funkcja trójkątna

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$\Lambda(x, y) = \Lambda(x) \Lambda(y)$$

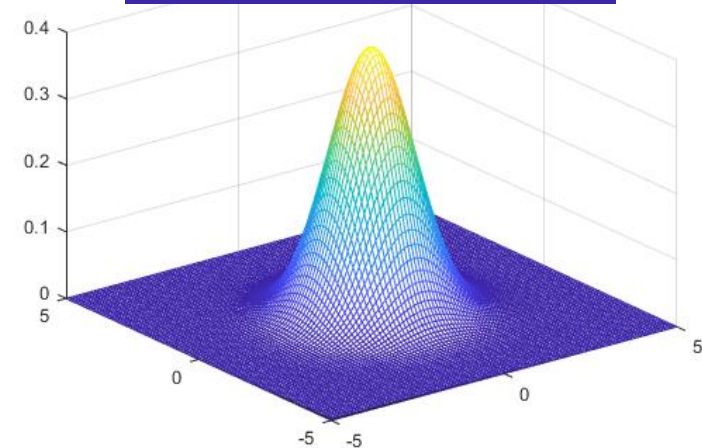
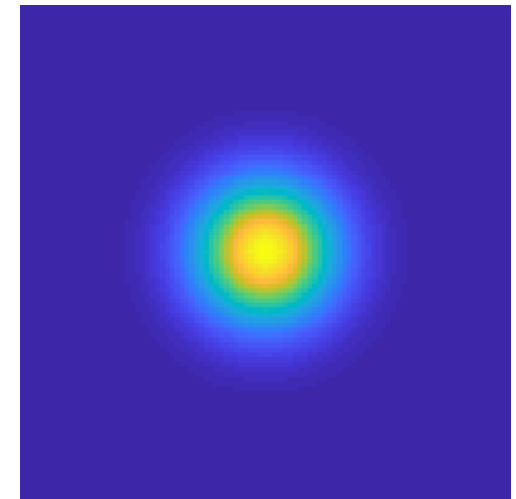
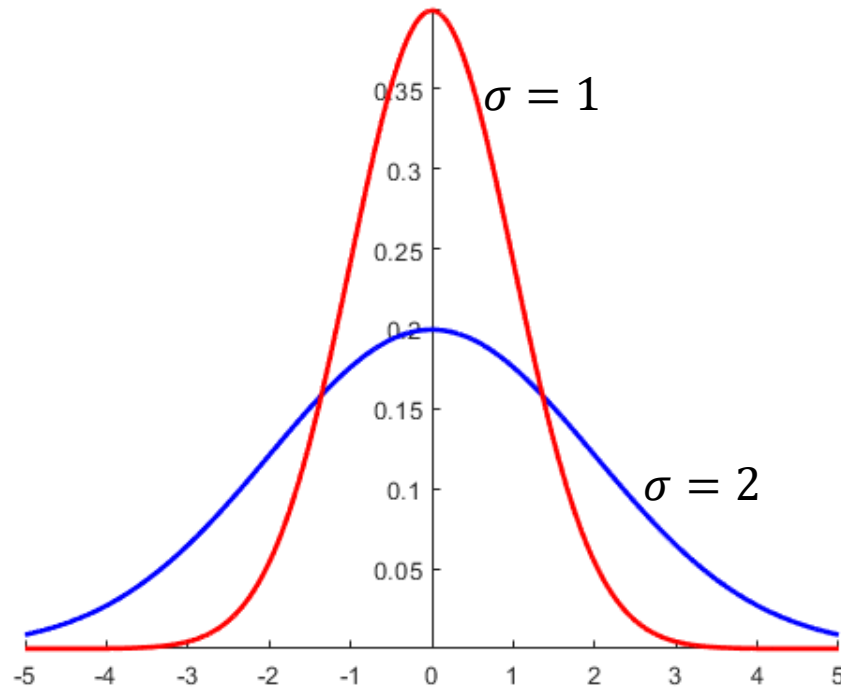
Do opisu układów niekoherentnych



# Funkcje specjalne

Funkcja Gaussa (rozkład normalny)

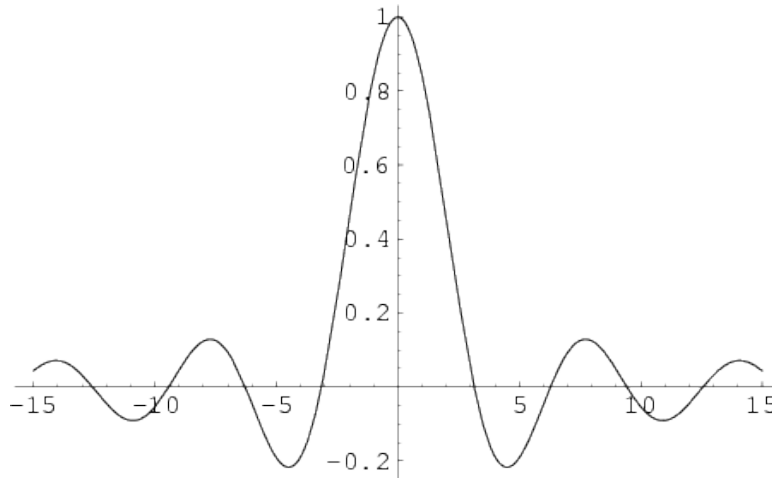
$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Rozkład światła na ekranie

## Funkcja sincus

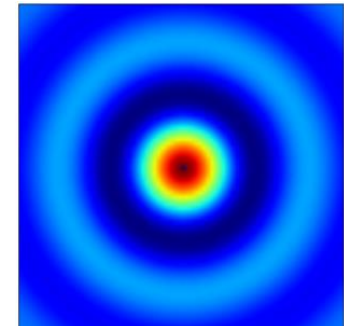
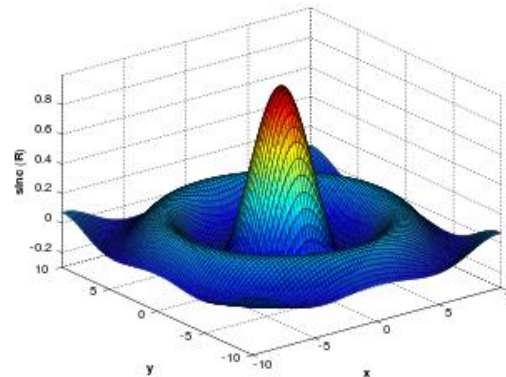
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



$$\text{sinc}(0) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) dx = 1$$

$$\text{sinc}(x, y) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(y)$$



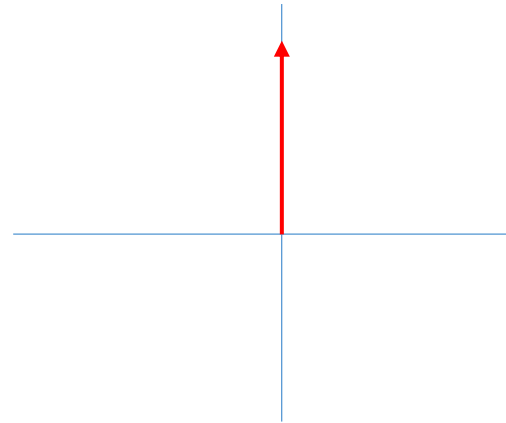
Dyfrakcja, odpowiedź impulsowa

## Funkcja delta Diraca

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \exp\left(\frac{-\pi x^2}{a^2}\right)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$



# Funkcje specjalne

## Funkcja delta Diraca

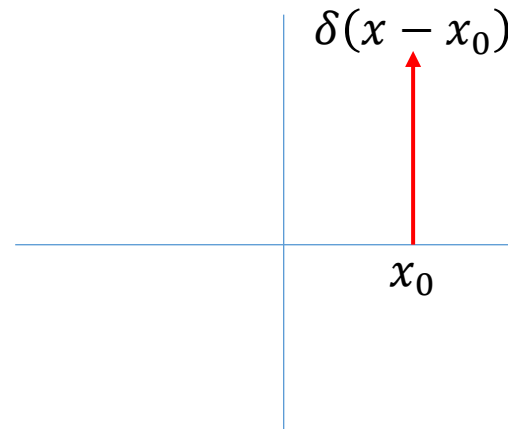
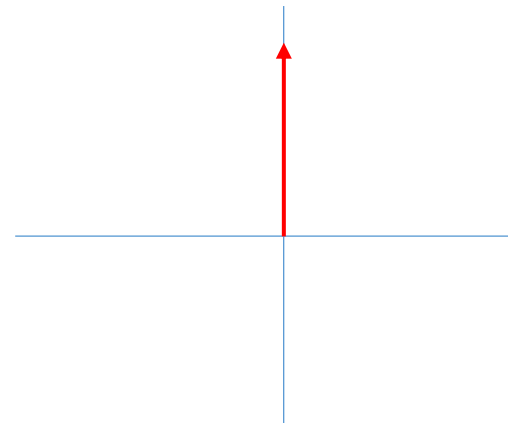
$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \exp\left(\frac{-\pi x^2}{a^2}\right)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$$

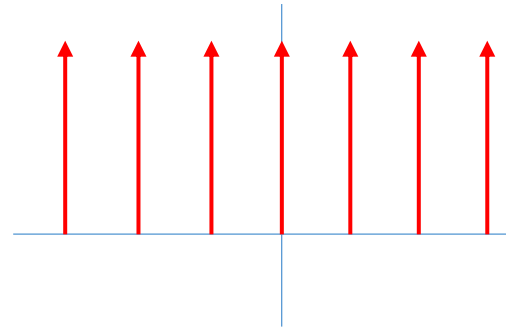
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$$

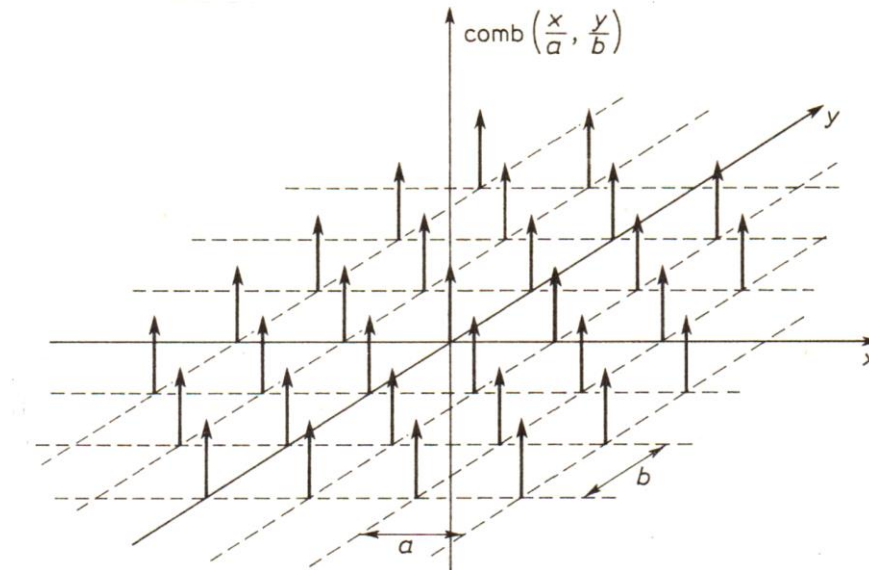


## Funkcja grzebieniowa

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

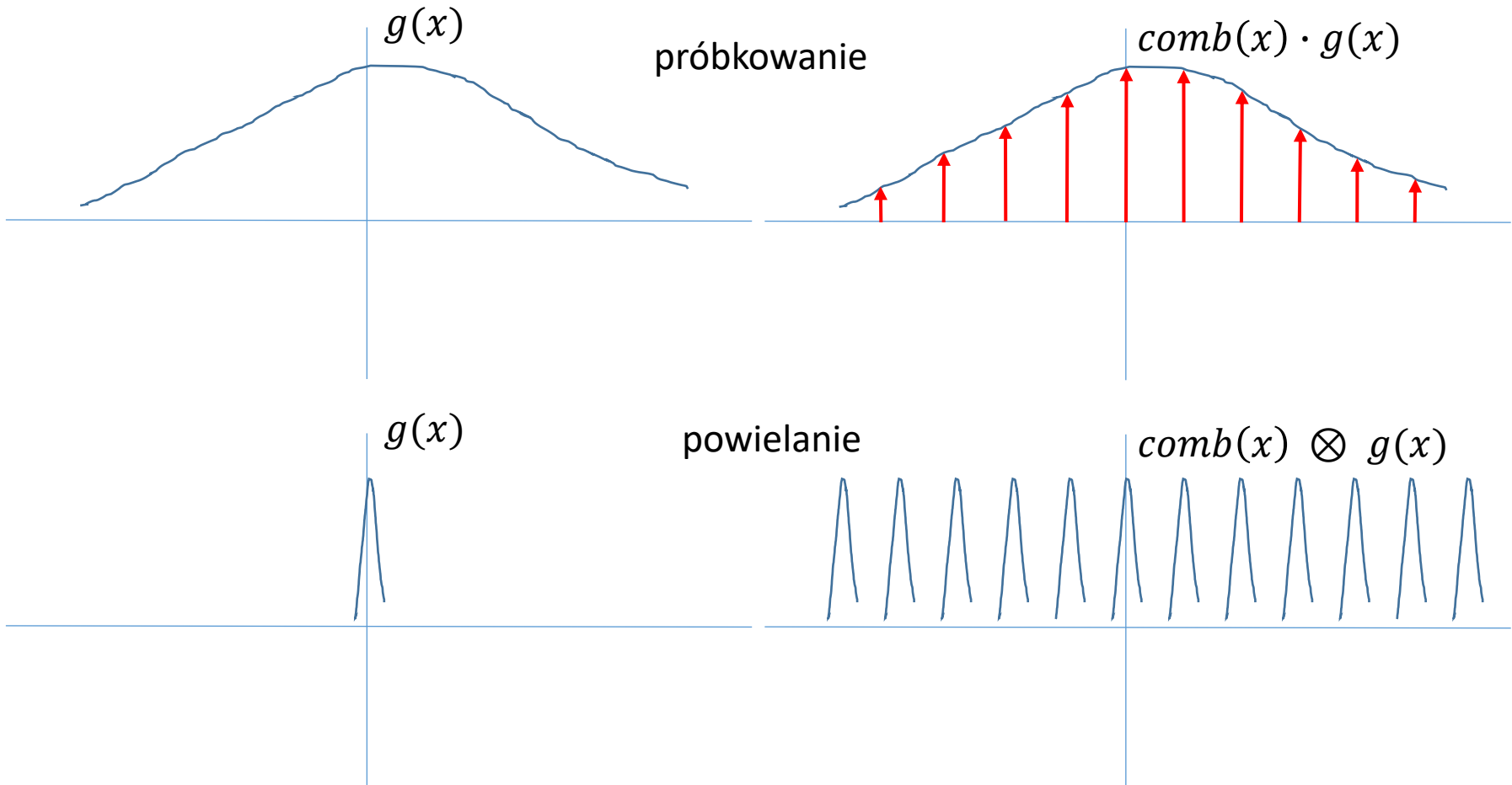


$$\text{comb}(x, y) = \text{comb}(x) \text{comb}(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - n, y - m)$$



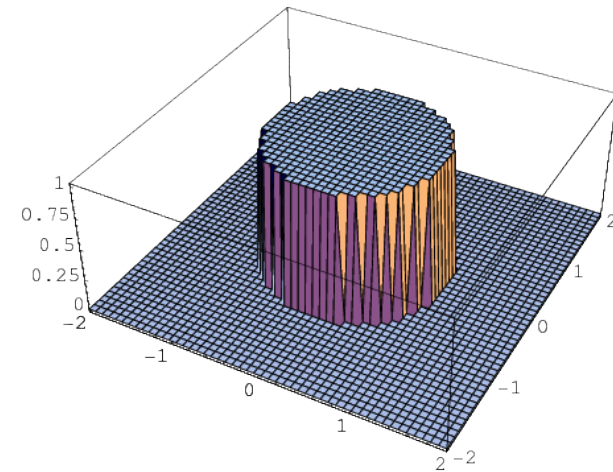
# Funkcje specjalne

Funkcja grzebieniowa



Funkcja kołowa

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

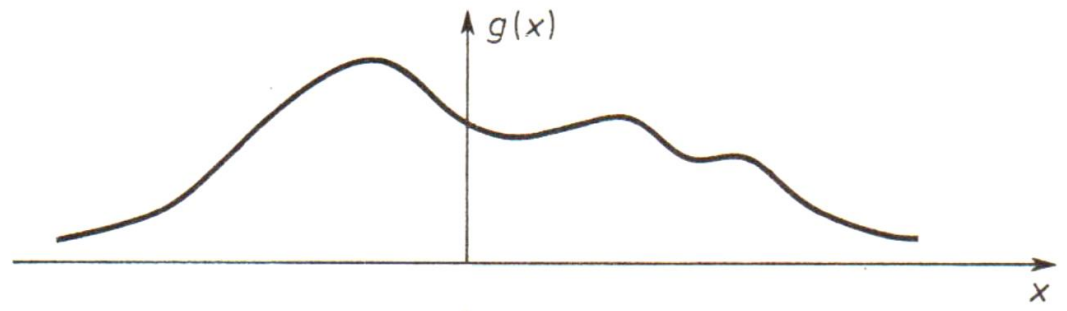


Apertura, otwór kołowy

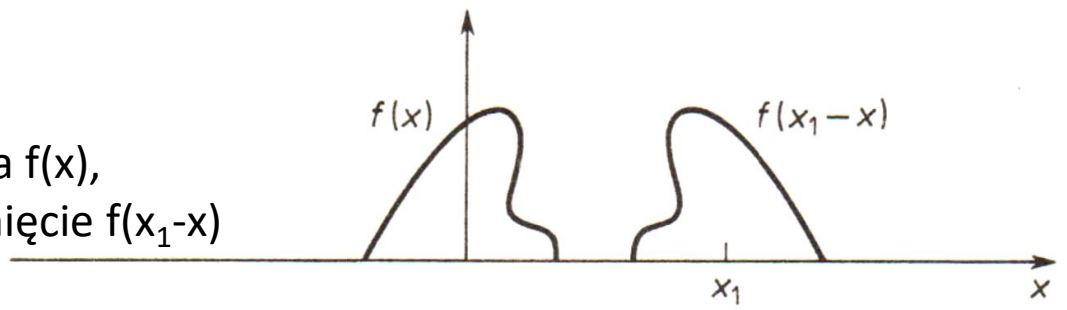
# Spot

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx'$$

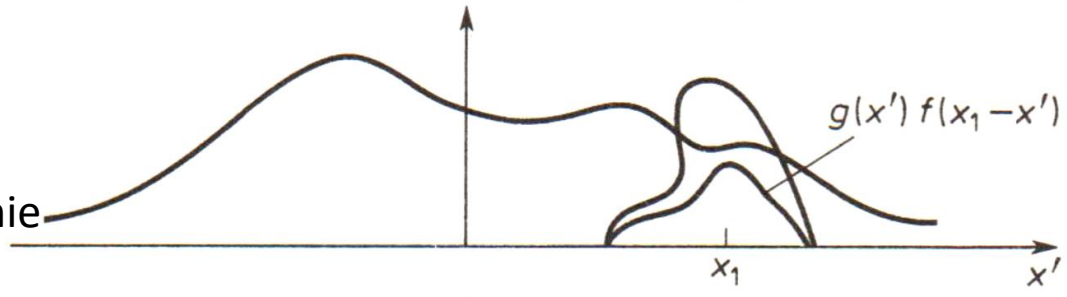
$$h(x) = f(x)*g(x)$$



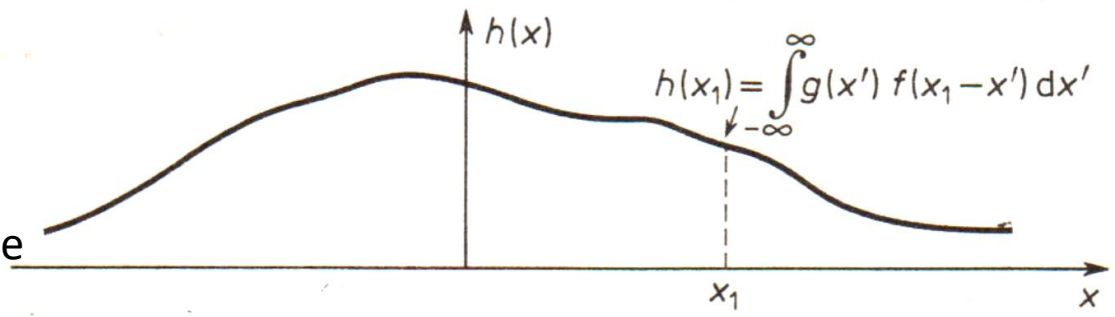
inwersja  $f(x)$ ,  
przesunięcie  $f(x_1-x)$



mnożenie



całkowanie





Własność przemienności:

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

Własność łączności:

$$[f(x) * g(x)] * q(x) = f(x) * [g(x) * q(x)]$$

Rozdzielność względem dodawania:

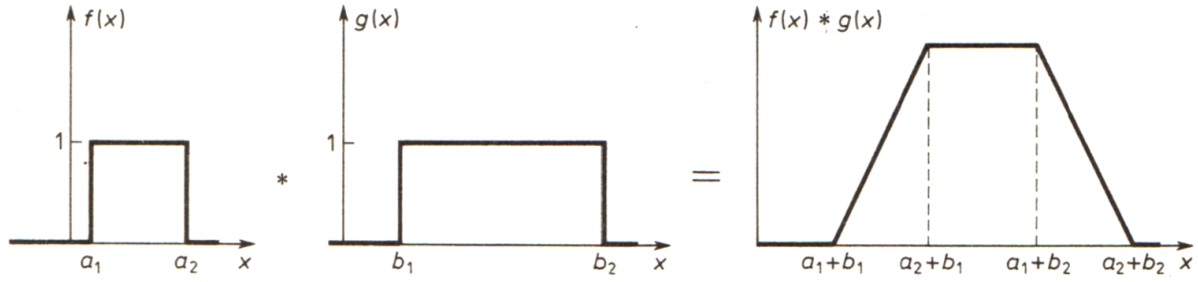
$$q(x) * [af(x) + bg(x)] = a[q(x) * f(x)] + b[q(x) * g(x)]$$

Niezmienniczość względem przesunięcia:

Jeśli  $f(x) * g(x) = h(x)$ ,

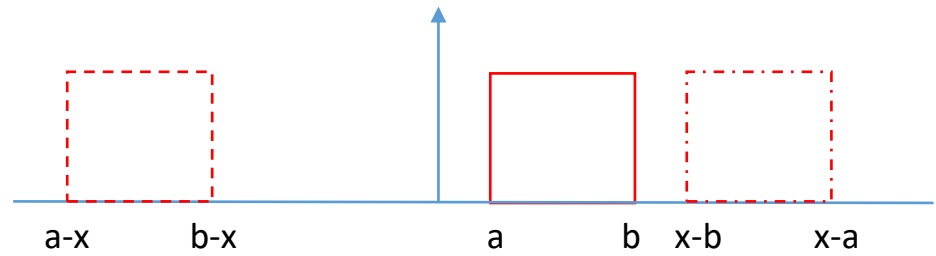
to  $f(x - x_0) * g(x) = h(x - x_0)$

# Spot



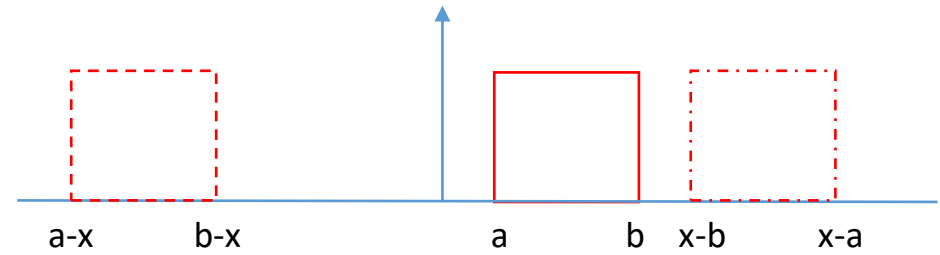
# Splot

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



# Splot

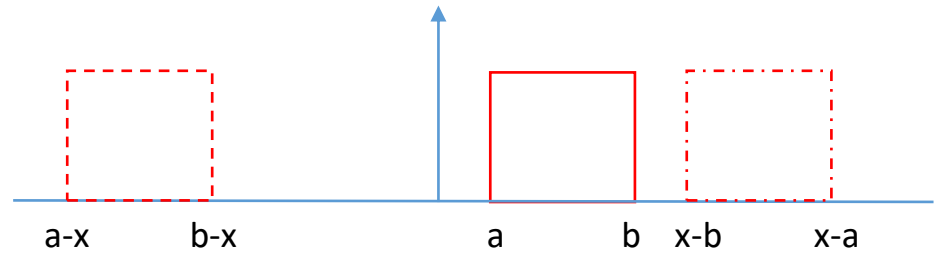
$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$

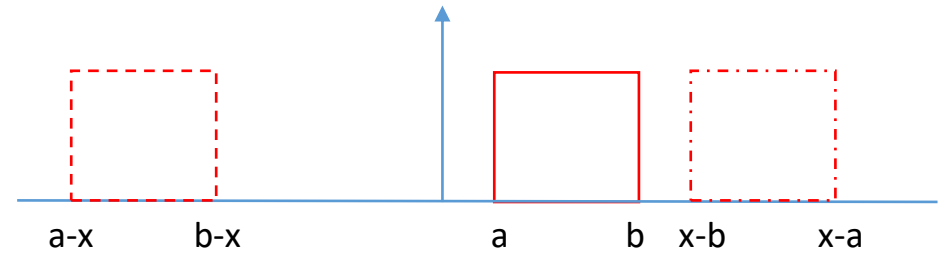
# Splot

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$
2.  $a < x - b \leq b \rightarrow a + b < x \leq 2b \rightarrow h(x) =$

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

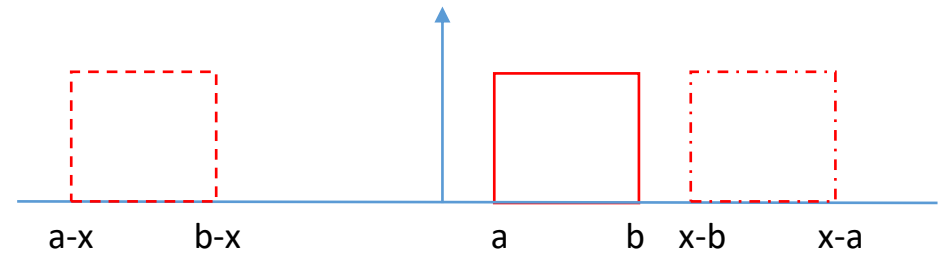


1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$
2.  $a < x - b \leq b \rightarrow a + b < x \leq 2b \rightarrow h(x) = \int_{x-b}^b A A dx =$   

$$A^2 \int_{x-b}^b dx = A^2(b - x + b) =$$

# Splot

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

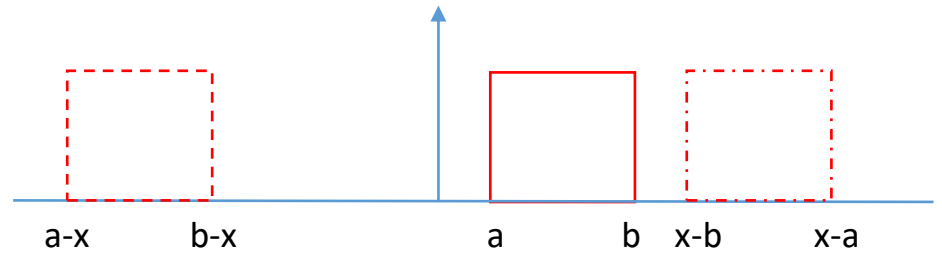


1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$

2.  $a < x - b \leq b \rightarrow a + b < x \leq 2b \rightarrow h(x) = \int_{x-b}^b A A dx =$

$$A^2 \int_{x-b}^b dx = A^2(b - x + b) = A^2(2b - x)$$

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



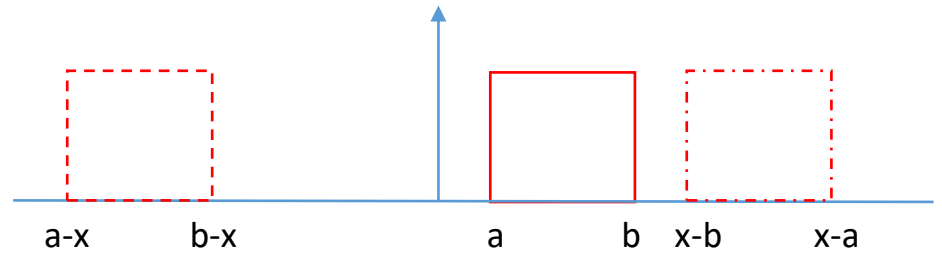
1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$

2.  $a < x - b \leq b \rightarrow a + b < x \leq 2b \rightarrow h(x) = \int_{x-b}^b A A dx =$   
 $A^2 \int_{x-b}^b dx = A^2(b - x + b) = A^2(2b - x)$

3.  $a < x - a \leq b \rightarrow 2a < x \leq a + b \rightarrow h(x) = \int_a^{x-a} A A dx =$



$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ A & a < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



1.  $x - b > b \rightarrow x > 2b \rightarrow h(x) = 0$

2.  $a < x - b \leq b \rightarrow a + b < x \leq 2b \rightarrow h(x) = \int_{x-b}^b A A dx =$   
 $A^2 \int_{x-b}^b dx = A^2(b - x + b) = A^2(2b - x)$

3.  $a < x - a \leq b \rightarrow 2a < x \leq a + b \rightarrow h(x) = \int_a^{x-a} A A dx =$   
 $A^2 \int_a^{x-a} dx = A^2(x - a - a) = A^2(x - 2a)$

4.  $x - a < a \rightarrow x < 2a \rightarrow h(x) = 0$

