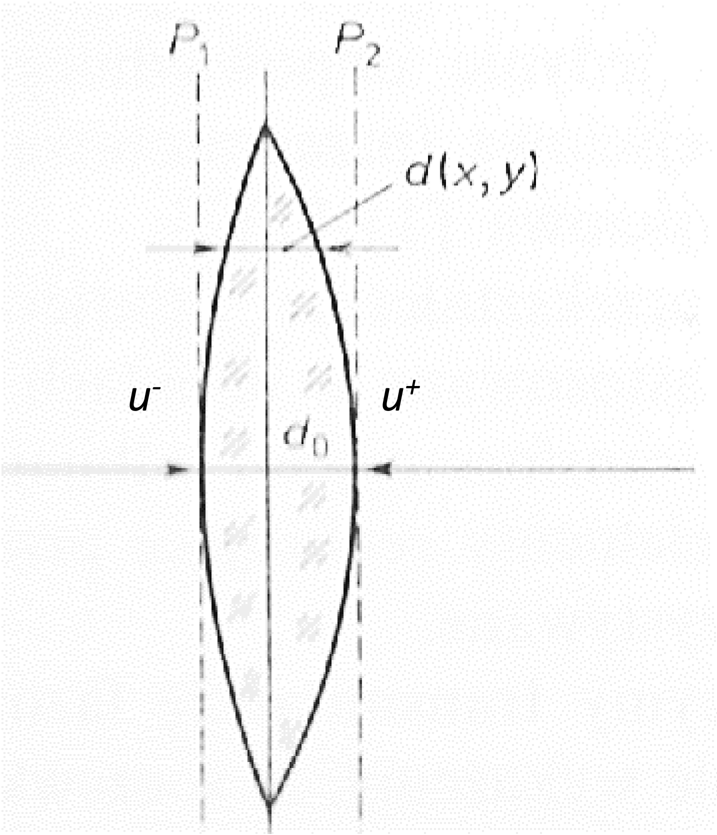
1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej



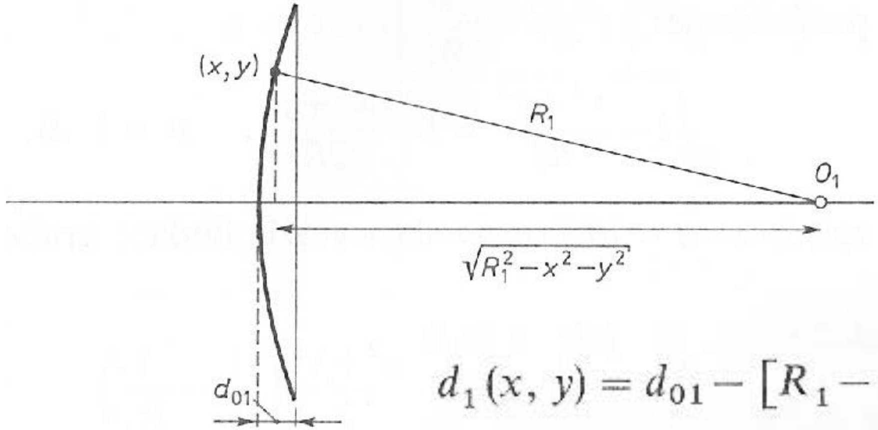
$$u^+(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]\, u^-(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = knd(x, y) + k[d_0 - d(x, y)]$$

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

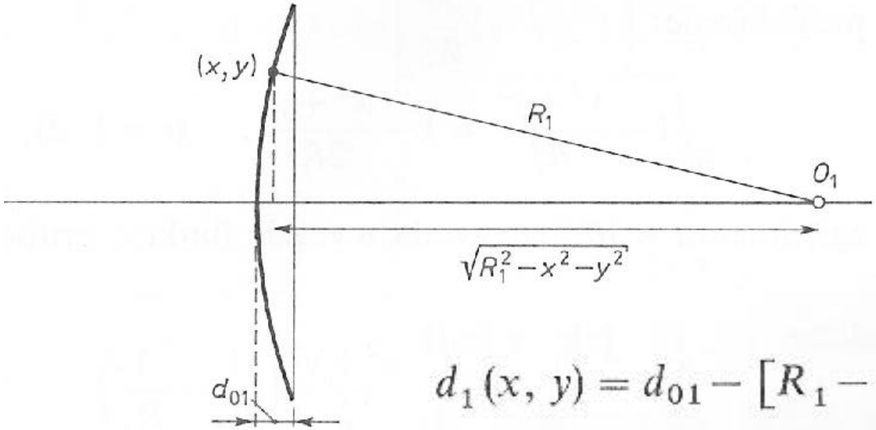
$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



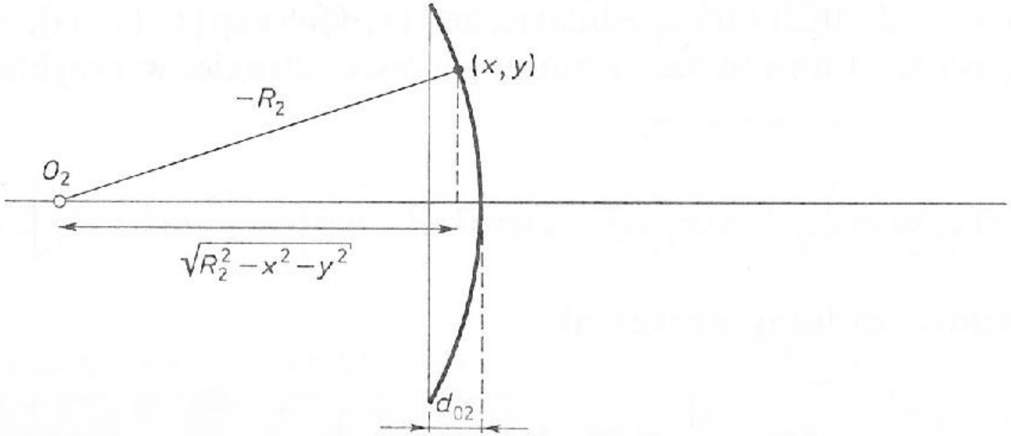
$$d_1(x, y) = d_{01} - \left[R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}\right] = d_{01} - R_1\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



$$d_1(x, y) = d_{01} - \left[R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}\right] = d_{01} - R_1\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right]$$



$$d_2(x, y) = d_{02} - \left[-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)}\right] = d_{02} + R_2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Dodajemy:

$$d(x, y) = d_0 - R_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}}\right) + R_2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}}\right).$$

Stosując przybliżenie przyosiowe:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_i^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_i^2}, \qquad (i = 1, 2),$$

Dostajemy:

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Soczewka zmienia fazę fali świetlnej: $t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)],$

$$t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] = \exp(iknd_0)\exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]$$

gdzie: $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej *f*:

$$u^{+}(x, y) = A \exp(ikn d_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

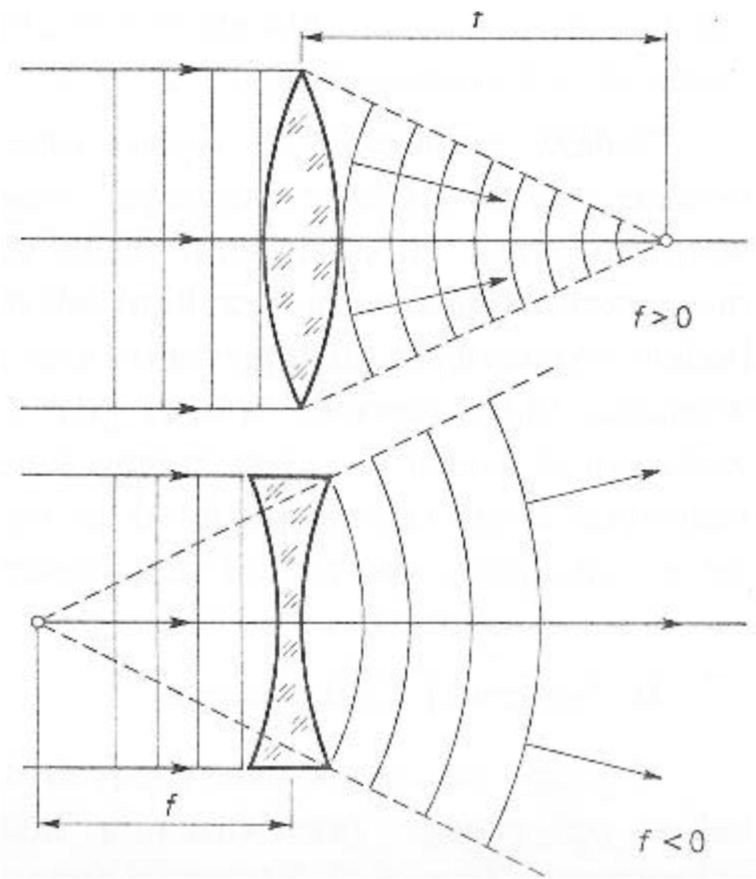
Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej *f*:

$$u^{+}(x, y) = A \underline{\exp(iknd_0)} \underline{\exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)\right]},$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Jeśli oświetlimy soczewkę falą sferyczną:

$$u^{-}(x, y) = A \exp\left[\frac{ik}{2R}(x^2 + y^2)\right],$$

R – promień krzywizny powierzchni falowej.

$$\frac{1}{R_+} = \frac{1}{R_-} - \frac{1}{f}$$

R_-, R_+ – promień krzywizny przed i za soczewką.

Dla $R_- = f$ *dostajemy* $R_+ = \infty$

Gdy uwzględnimy aperturę soczewki i pominiemy stałą fazę:

$$\boxed{t(x, y) = P(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]}$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Z wykładu 4, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint\limits_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx\, dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Z wykładu 7, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint\limits_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx\, dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\ e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left(\underline{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 + y^2 + \underline{x_0^2 + y_0^2} - \underline{2(xx_0 + yy_0)}$$

Dyfrakcja Fraunhofera:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\ e^{i\frac{k_0}{2z_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{i\frac{k_0}{z_0}(xx_0+yy_0)}$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i\frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left(x^2+y^2\right)} e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left(x_0^2+y_0^2\right)} e^{-i\frac{k_0}{2z_0}2\left(xx_0+yy_0\right)}$$

Soczewka:

$$t(x, y) = P(x, y)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x^2+y^2)\right]$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i\frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} \underline{e^{i\frac{k_0}{2z_0}(x^2+y^2)}} e^{i\frac{k_0}{2z_0}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i\frac{k_0}{2z_0}2(xx_0+yy_0)}$$

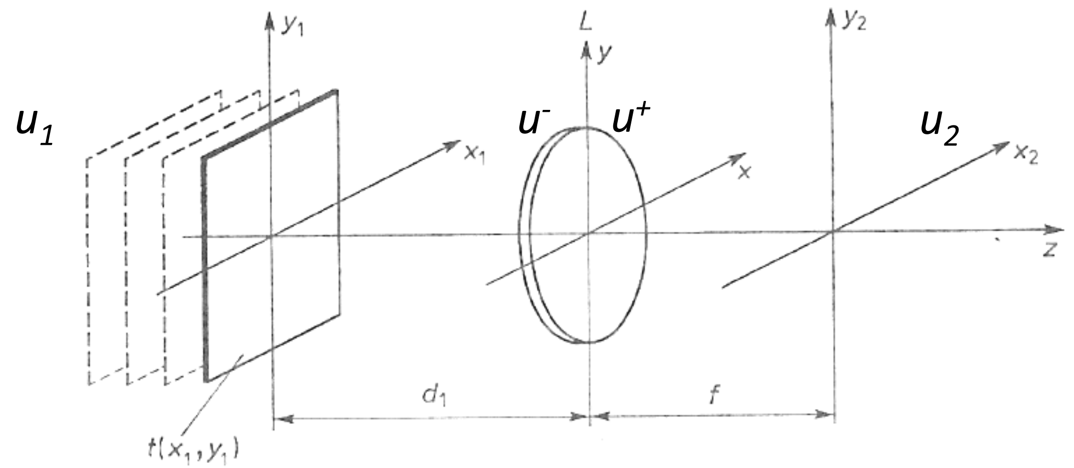
Soczewka:

$$t(x, y) = P(x, y)\underline{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x^2+y^2)\right]}$$

Znoszą się !

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą płaską:



$$x_0 = x_2$$

$$u_1(x_1, y_1) = A\, t(x_1, y_1)$$

Dyfrakcja Fresnela pola u^+:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(\mathrm{i}kf)}{\mathrm{i}\lambda f} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{f}(x x_2 + y y_2)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Pole u^+ *to* obraz u^- transformowany przez soczewkę*:*

$$u^+(x, y) = P(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] u^-(x, y).$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Pole u^+ *to* obraz u^- transformowany przez soczewkę*:*

$$u^+(x, y) = P(x, y) \boxed{\exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]} u^-(x, y).$$

Znoszą się

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \boxed{\exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]} \exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_2 + yy_2)\right] dx\, dy$$

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2 + yy_2)\right] dx\, dy$$

gdzie: $C = \dfrac{\exp(ikf)}{i\lambda f}.$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2+y_2^2)\right] \boxed{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2+yy_2)\right] dx\, dy}$$

Transformata Fouriera

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)(x_2^2+y_2^2)\right] \times$$
$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_1x_2+y_1y_2)\right] dx_1\, dy_1$$

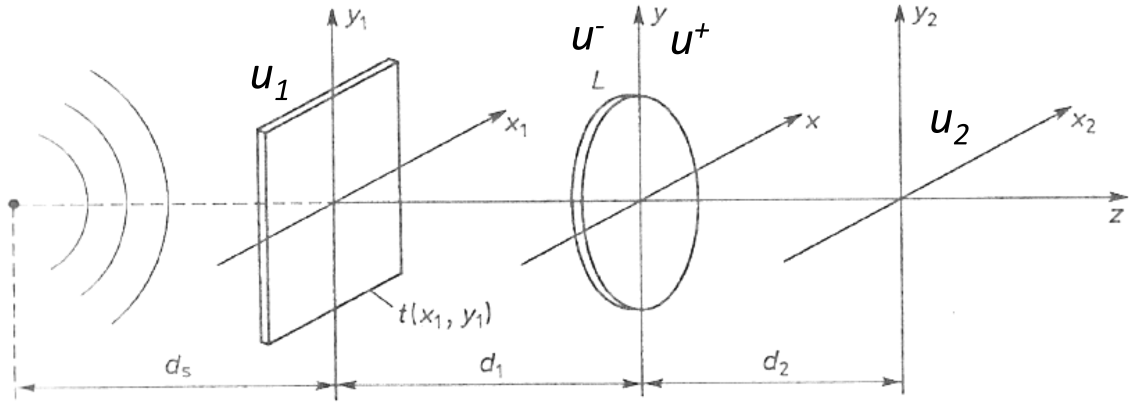
$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \boxed{\exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1-\frac{d_1}{f}\right)(x_2^2+y_2^2)\right]} \times$$
$$\times \mathscr{F}\left\{ t(x_1, y_1) P\left(x_1+\frac{d_1}{f}x_2, y_1+\frac{d_1}{f}y_2\right)\right\},$$

Zeruje się gdy $d_1=f$

Transformata Fouriera apertury

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda d_s} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2d_s}(x_1^2 + y_1^2)\right] t(x_1, y_1)$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{v}{\mathrm{i}^2\lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2d_2}\left(1 - \frac{v}{d_2}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2}\left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}2\pi}{\lambda}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\frac{v}{d_1 d_2}\right] \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}y_1,$$

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}.$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{v}{i^2\lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp\left[\frac{ik}{2d_2}\left(1 - \frac{v}{d_2}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \boxed{\exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right]} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\frac{v}{d_1 d_2}\right] dx_1\, dy_1,$$

Transformata Fouriera

kiedy to się zeruje mamy transformatę Fouriera

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}.$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

$$\frac{1}{d_s}+\frac{1}{d_1}-\frac{v}{d_1^2}=0$$

uwzględniając $\quad \frac{1}{v}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f}.$

$$\frac{1}{d_3}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$$

- wzór soczewkowy $\quad d_3 = d_s + d_1$

$$u_2(x_2, y_2)=\frac{1}{i\lambda f}\exp\left[\frac{ik}{2d_2}\frac{(d_1+d_s)(f-d_1)}{d_s f}(x_2^2+y_2^2)\right]\times$$

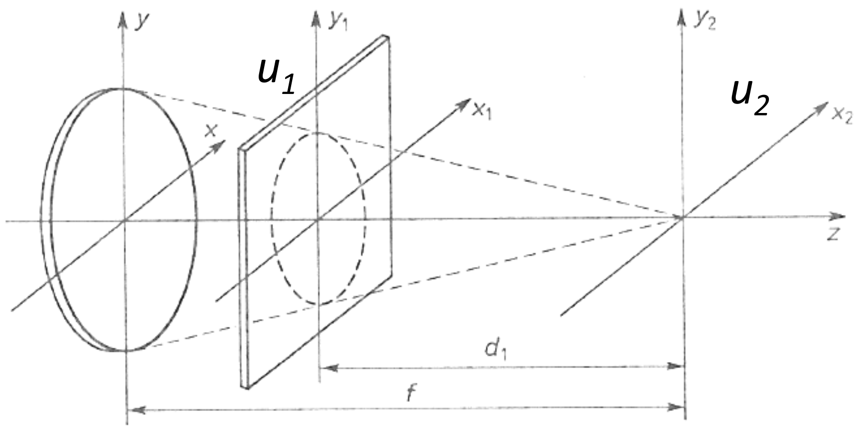
$$\times\boxed{\iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1)\exp\left[-\underbrace{\frac{i2\pi(d_s+d_1-f)}{\lambda d_s f}}_{\text{czynnik skalujący}}(x_1x_2+y_1y_2)\right]dx_1\,dy_1}$$

przeskalowana transformata Fouriera

Dla $\quad d_1 = f \quad$ skala transformata Fouriera jak przy fali płaskiej.
Zmiana skali możliwa przez zmianę: λ lub d_1

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną zbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{Af}{d_1} \exp\left[-\frac{ik}{2d_1}(x_1^2 + y_1^2)\right] P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) t(x_1, y_1).$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{Af}{i\lambda d_1^2} \exp\left[\frac{ik}{2d_1}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda d_1}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1\, dy_1$$

czynnik skalujący