

# WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

# Funkcja przenoszenia kontrastu

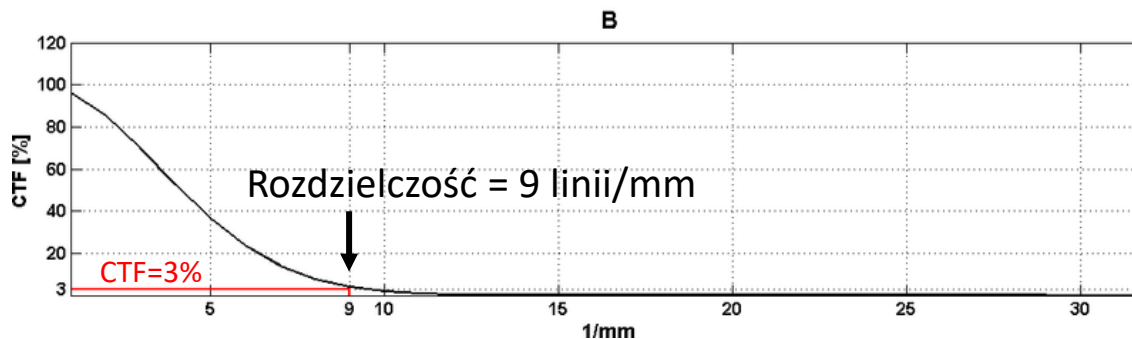
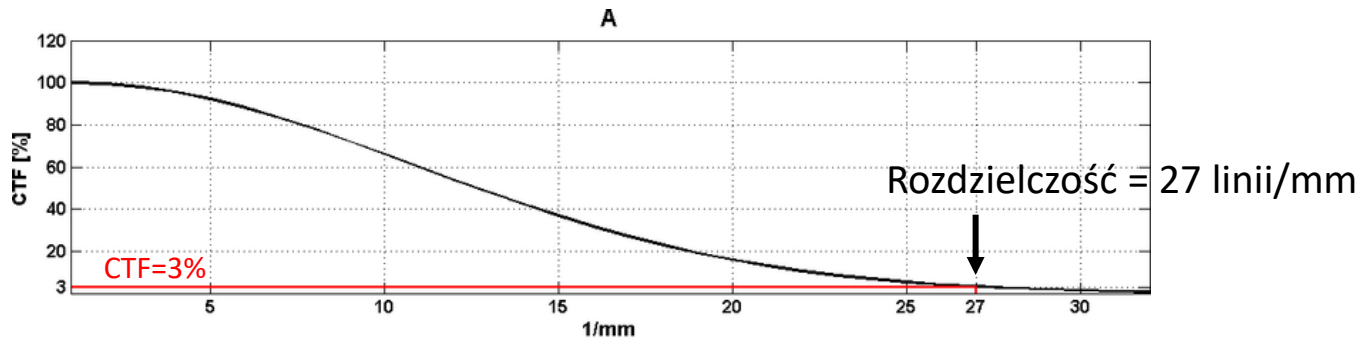
Contrast Transfer Function - CTF:

Kontrast: 
$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad 0 \leq K \leq 1$$

CTF: 
$$CTF = \frac{K_{wy} \left( \frac{\text{linie}}{\text{mm}} \right)}{K_{we} \left( \frac{\text{linie}}{\text{mm}} \right)} \times 100 \quad 0\% \leq CTF \leq 100\%$$

układy obrazujące mogą zmniejszyć kontrast a nie go poprawić

Rozdzielczość układu obrazującego jest to taka liczba linii na jednostkę długości dla której kontrast spada poniżej pewnej ustalonej wartości. Zwykle graniczna wartość kontrastu ustalona jest na poziomie 3%.

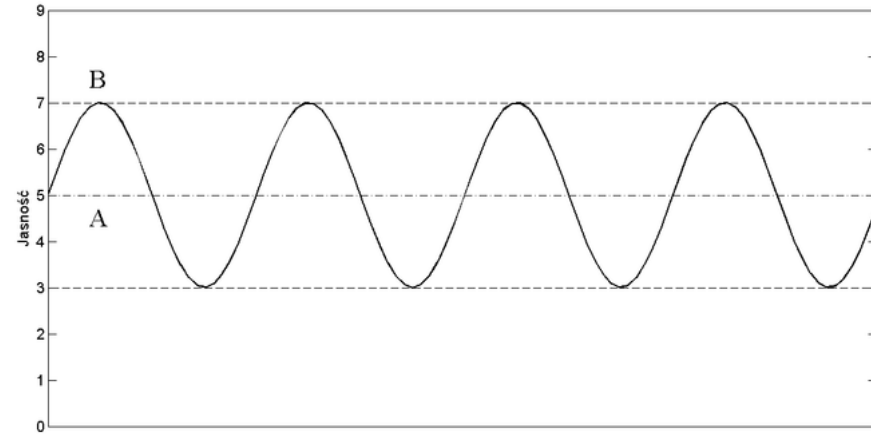


# Funkcja przenoszenia modulacji

Modulation Transfer Function - MTF:

Przedmiot:  $f(x, y) = A + B \sin(2\pi ux)$ ,

Głębokość modulacji:  $m = \frac{B}{A}$ .

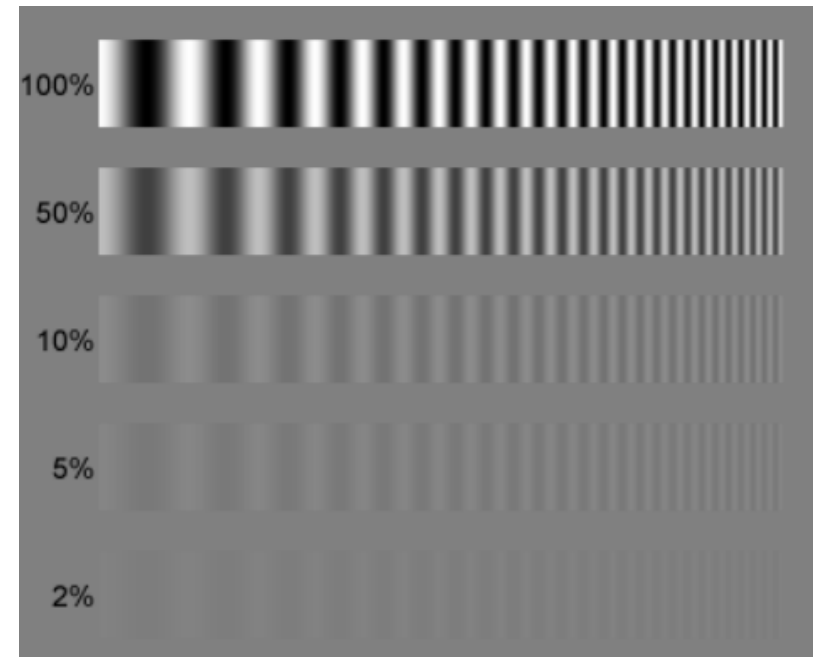


Obraz (po przejściu przez jakiś układ optyczny):  $g(x, y) = C + D \sin(2\pi ux)$ ,

Głębokość modulacji:  $m = \frac{D}{C}$ .

Jak zmieniła się głębokość modulacji:

$$H = \frac{\frac{D}{C}}{\frac{B}{A}} = \frac{D \cdot A}{C \cdot B}, \quad 0 \leq H \leq 1$$



# Funkcja przenoszenia modulacji

Powiązanie z Funkcją przenoszenia:

$$\text{Przedmiot: } f(x, y) = A + \sum_i \sum_j B_{ij} \sin(2\pi u_i x + 2\pi v_j y)$$

$$\text{Obraz: } g(x, y) = C + \sum_i \sum_j D_{ij} \sin(2\pi u_i x + 2\pi v_j y)$$

$$\text{Ale obraz można przedstawić jako: } G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

H – funkcja przenoszenia  
h – odpowiedź impulsowa

Mamy (moduł TF = amplituda):

$$\left. \begin{aligned} A &= |F(u_0, v_0)| \\ B_{ij} &= |F(u_i, v_j)| \\ C &= |G(u_0, v_0)| \\ D_{ij} &= |G(u_i, v_j)| \end{aligned} \right\} |H_{ij}| = \frac{|G(u_i, v_j)|}{|F(u_i, v_j)|} = \frac{D_{ij}}{B_{ij}}$$

$$\text{czyli: } g(x, y) = H(0, 0)A + \sum_i \sum_j H(u_i, v_j)B_{ij} \sin(2\pi u_i x + 2\pi v_j y)$$

$$\text{Stąd głębokość modulacji: } m_{u_i, v_j}^g = \frac{|H(u_i, v_j)|B_{ij}}{|H(0, 0)|A} \quad \text{Może być różna dla różnych częstości przestrzennych}$$

# Funkcja przenoszenia modulacji

Liczę jak zmieniła się głębokość modulacji:

$$\frac{m_{u_i, v_j}^g}{m_{u_i, v_j}^f} = \frac{|H(u_i, v_j)| B_{ij}}{|H(0, 0)| A} \frac{A}{B_{ij}} = \frac{|H(u_i, v_j)|}{|H(0, 0)|}$$

$$MTF(u_i, v_j) = \frac{|H(u_i, v_j)|}{|H(0, 0)|}$$

Czyli MTF możemy wyznaczyć znając funkcję przenoszenia lub odpowiedź impulsową

Dla układu optycznego złożonego z wielu elementów:

$$MTF(u, v) = MTF_1(u, v) \cdot MTF_2(u, v) \cdot \dots \cdot MTF_N(u, v)$$

Funkcja Przenoszenia Modulacji a rozdzielczość przestrzenna:

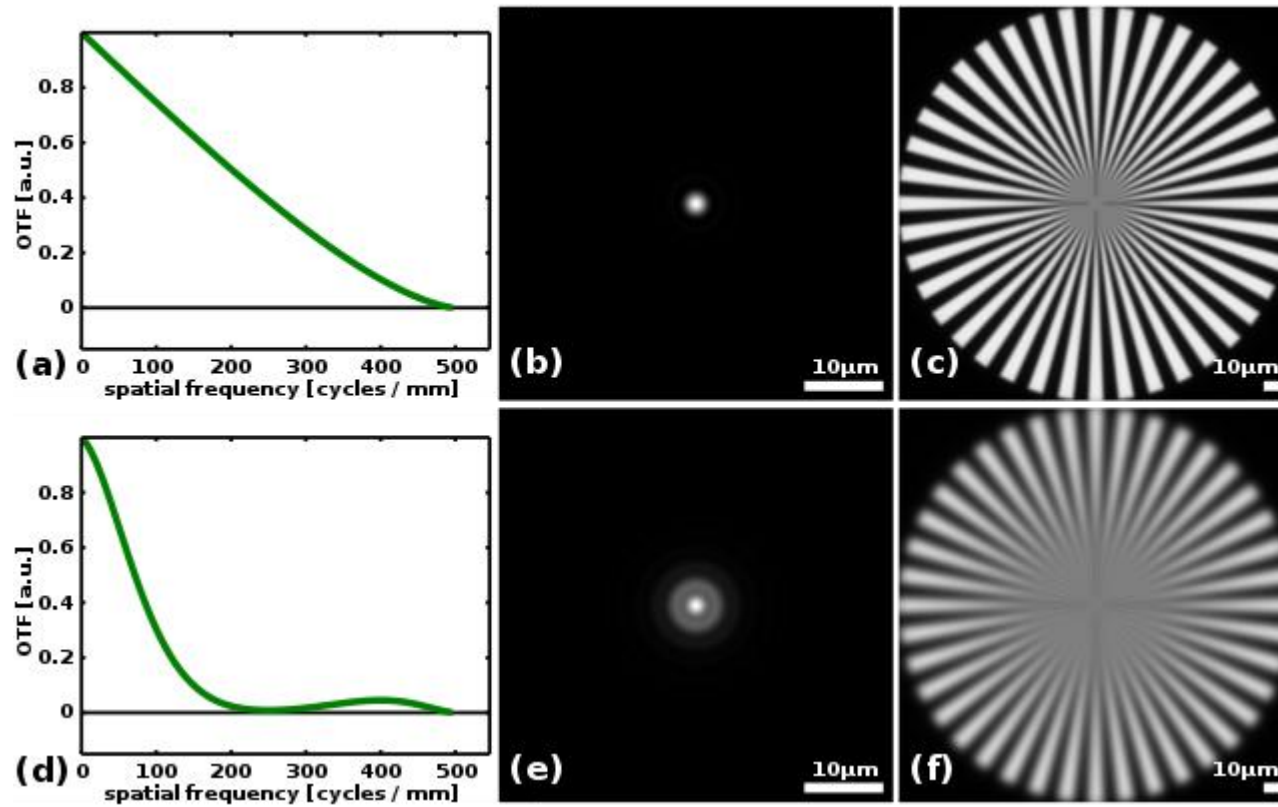
$$K = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{A + B - (A - B)}{A + B + (A - B)} = \frac{B}{A} = m$$

Głębokość modulacji

$$CTF = \frac{K_{wy} \left( \frac{\text{linie}}{\text{mm}} \right)}{K_{we} \left( \frac{\text{linie}}{\text{mm}} \right)} \times 100 \quad MTF = \frac{m^g}{m^f}$$

# Funkcja przenoszenia modulacji

Przykład MTF:



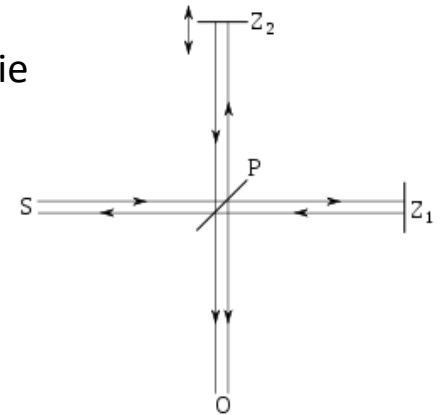
# Oświetlenie koherentne i nie koherentne

Teoria koherencji to badanie korelacji, które istnieją między różnymi częściami pola świetlnego.

Koherencja czasowa wskazuje na korelację między polami przesuniętymi w czasie

$$E(r, t) \text{ i } E(r, t + \Delta t)$$

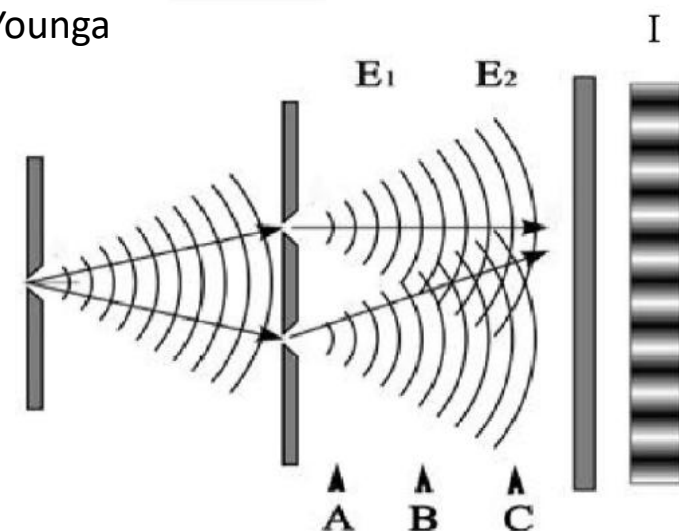
Do pomiaru spójności czasowej wykorzystuje się interferometr Michelsona



Spójność przestrzenna ma związek z korelacjami między polami w różnych lokalizacjach przestrzennych

$$E(r, t) \text{ i } E(r + \Delta r, t)$$

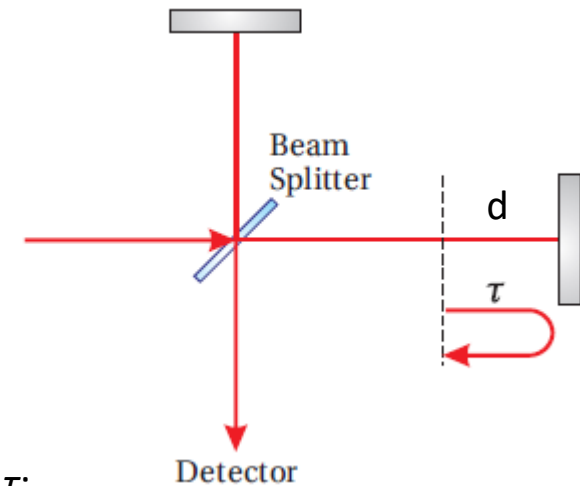
Do pomiaru spójności przestrzennej dwuszczelinowy interferometr Younga



# Koherencja czasowa

Dla idealnie spójnego światła:

Opóźnienie:  $\tau = 2d / c$

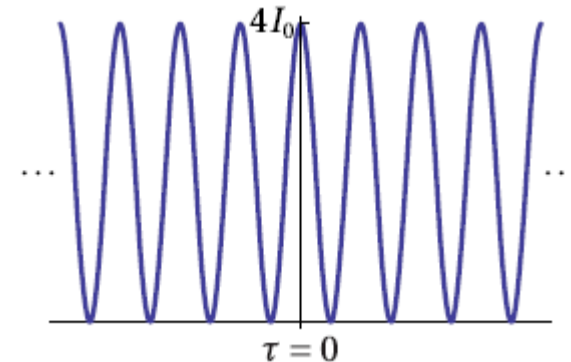


Weźmy 2 monochromatyczne fale płaskie przesunięte w czasie o  $\tau$ :

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}}(\tau) &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[ \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega(t - \tau))} \right] \cdot \left[ \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega(t - \tau))} \right]^* \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[ 2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + 2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \cos(\omega\tau) \right] \\ &= 2I_0 [1 + \cos(\omega\tau)] \end{aligned}$$

gdzie:  $I_0 \equiv \frac{c\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*$  jest natężeniem gdy 1 wiązka jest wygaszona (brak interferencji)

W zależności od  $\tau$  dostajemy prążki, wygaszenie lub stan pośredni:





# Koherencja czasowa

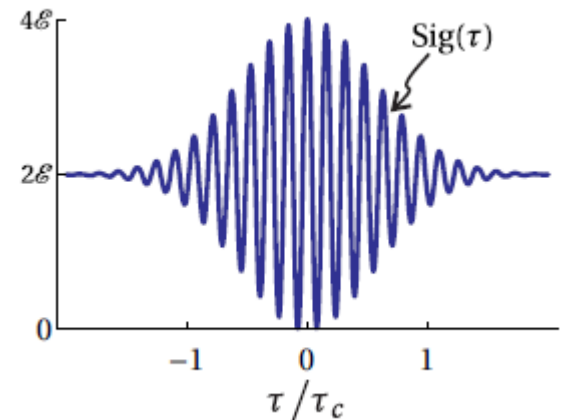
Gdy fale nie będą idealnie monochromatyczne, czyli różne  $\omega$  zwór przestaje być prawdziwy – prążki zanikają  
Im mniej spójne światło tym mniejsza widoczność prążków.

2 fale niemonochromatyczne przesunięte w czasie:  $\mathbf{E}_{\text{tot}}(t, \tau) = \mathbf{E}(t) + \mathbf{E}(t - \tau)$  (zależność od  $t$ )

gdzie: 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Po transformacji Fouriera mamy zależność od  $\omega$ : 
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt$$

Natężenie: 
$$\begin{aligned} I_{\text{tot}}(t, \tau) &= \frac{c\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_{\text{tot}}(t, \tau) \cdot \mathbf{E}_{\text{tot}}^*(t, \tau) \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} [\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t) + \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) + \mathbf{E}(t - \tau) \cdot \mathbf{E}^*(t) + \mathbf{E}(t - \tau) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau)] \\ &= I(t) + I(t - \tau) + \frac{c\epsilon_0}{2} [\mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) + \mathbf{E}(t - \tau) \cdot \mathbf{E}^*(t)] \\ &= I(t) + I(t - \tau) + c\epsilon_0 \text{Re} \{ \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) \} \end{aligned}$$



# Koherencja czasowa

To co rejestrowane jest na detektorze punktowym to całka po czasie (zależność od  $t$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{\text{tot}}(t, \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} I(t - \tau) dt + c\epsilon_0 \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) dt$$

Dla oświetlenia wiązkami wolno zmiennymi w czasie:  $\mathcal{E} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} I(t - \tau) dt$

Przekształcam:  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{E}^*(t - \tau) dt \right]$

Czyli:  $\int_{-\infty}^{\infty} I_{\text{tot}}(t, \tau) dt = 2\mathcal{E} \left[ 1 + \frac{1}{\mathcal{E}} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right]$

Rejestrowany sygnał ma postać:  $\text{Sig}(\tau) \propto 2\mathcal{E} [1 + \text{Re} \{ \gamma(\tau) \}]$

gdzie  $\gamma(\tau) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega}$  definiujemy jako stopień koherencji światła.

Funkcja stopnia koherencji gamma opisuje oscylacje intensywności w detektorze w miarę przesuwania zwierciadła w jednym ramieniu interferometru.

# Koherencja czasowa

Koherentne

$$I_{\text{tot}}(\tau) = 2I_0 [1 + \cos(\omega\tau)]$$

Nie koherentne

$$\text{Sig}(\tau) \propto 2\mathcal{E} [1 + \text{Re} \{ \gamma(\tau) \}]$$

Można zdefiniować:

Czas koherencji: 
$$\tau_c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau = 2 \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau$$

Draga koherencji: 
$$\ell_c \equiv c\tau_c$$

Można jeszcze wprowadzić pojęcie widoczności prążków:

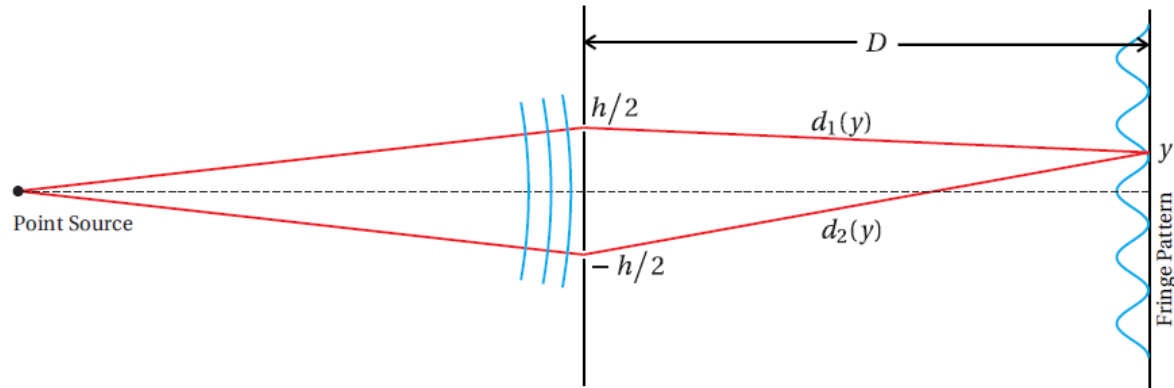
$$V(\tau) \equiv \frac{\max[\text{Sig}(\tau)] - \min[\text{Sig}(\tau)]}{\max[\text{Sig}(\tau)] + \min[\text{Sig}(\tau)]}$$

Co daje się też zapisać jako: 
$$V(\tau) = |\gamma(\tau)|$$

# Koherencja przestrzenna

Ekran z 2 szczelinami oświetlam falą wychodzącą z rozciągniętego źródła.  
Widoczność prążków zależy od koherencji przestrzennej.

Gdy światło wychodzi z punktu to kontrast maksymalny:



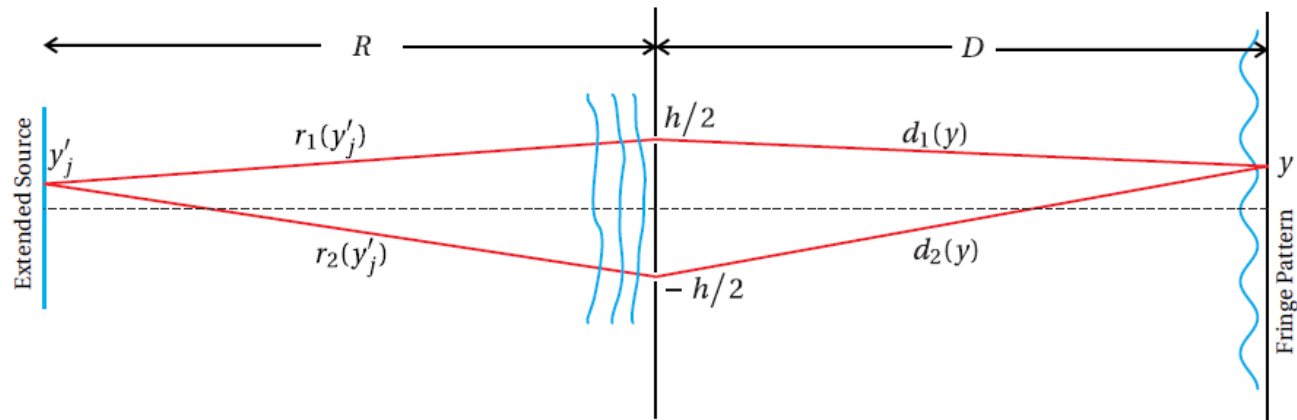
$$I_{\text{tot}}(h) = 2I_0 [1 + \cos(kd_2 - kd_1)] = 2I_0 [1 + \cos(khy/D)]$$

Jest podobny do Michelsona dla koherentnej

$$I_{\text{tot}}(\tau) = 2I_0 [1 + \cos(\omega\tau)]$$

# Koherencja przestrzenna

Teraz źródło rozciągle:



$$E_1(y'_j) = E_0(y'_j) e^{i\{k[r_1(y'_j) + d_1(y)] - \omega t + \phi(y'_j)\}}$$

$$E_2(y'_j) = E_0(y'_j) e^{i\{k[r_2(y'_j) + d_2(y)] - \omega t + \phi(y'_j)\}}$$

Każdy punkt źródła w innej fazie. Więc każda para własne prążki ale w całości się rozmywają lub zanikają.

Weźmy 1 punkt źródła  $y'$ . Fala przejdzie przez 2 szczeliny i obserwujemy na ekranie w punkcie  $y$

Interferują tam 2 fale:

$$E_{\text{tot}}(h) = \sum_j \left[ E_1(y'_j) + E_2(y'_j) \right]$$

# Koherencja przestrzenna

Liczmy natężenie:

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}}(h) &= \frac{\epsilon_0 c}{2} |E_{\text{tot}}(h)|^2 \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \left[ \sum_j E_1(y'_j) + E_2(y'_j) \right] \left[ \sum_m E_1(y'_m) + E_2(y'_m) \right]^* \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \sum_{j,m} \left[ E_1(y'_j) E_1^*(y'_m) + E_2(y'_j) E_2^*(y'_m) + E_1(y'_j) E_2^*(y'_m) + E_2(y'_j) E_1^*(y'_m) \right] \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \sum_{j,m} |E_0(y'_j)| |E_0(y'_m)| \left[ e^{ik(r_1(y'_j) - r_1(y'_m))} + e^{ik(r_2(y'_j) - r_2(y'_m))} \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re} \left\{ e^{ik(r_1(y'_j) - r_2(y'_m))} e^{ik(d_1(y) - d_2(y))} \right\} \right] e^{i(\phi(y'_j) - \phi(y'_m))} \end{aligned}$$

Założmy, że mamy źródło termiczne – zupełnie losowe fazy.

Czyli różnice faz  $\phi(y'_j) - \phi(y'_m)$  zmieniają się losowo.

Można przybliżyć, że gdy są z tego samego punktu to interferują (1) jak z poza to nie (0):

$$\left\langle e^{i(\phi(y'_j) - \phi(y'_m))} \right\rangle_t = \delta_{j,m} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = m, \\ 0 & \text{if } j \neq m. \end{cases}$$

Pozwala to zapisać:

$$\langle I_{\text{tot}}(h) \rangle_t = \sum_j I(y'_j) + \sum_j I(y'_j) + 2\text{Re} \left\{ \sum_j I(y'_j) e^{ik(r_1(y'_j) - r_2(y'_j))} e^{ik(d_1(y) - d_2(y))} \right\}$$

# Koherencja przestrzenna

Biorąc przybliżenie małych kątów:  $d_1(y) - d_2(y) \cong hy/D$       $r_1(y'_j) - r_2(y'_j) \cong hy'_j/R$

Dostajemy:  $\langle I_{\text{tot}}(h) \rangle_t = \left[ 2 \sum_j I(y'_j) \right] [1 + \text{Re} \{ \gamma(h) \}]$

gdzie  $\gamma(h) \equiv \frac{e^{-i\frac{khy}{D}} \sum_j I(y'_j) e^{-i\frac{khy'_j}{R}}}{\sum_j I(y'_j)}$  definiujemy jako stopień koherencji.

Możemy to jeszcze przepisać dla wersji ciągłej (źródło nie z wielu punktów):

$$\gamma(h) \equiv \frac{e^{-i\frac{khy}{D}} \int_{-\infty}^{\infty} I(y') e^{-i\frac{khy'}{R}} dy'}{\int_{-\infty}^{\infty} I(y') dy'}$$

Pierwszy składnik  $\exp(-ikhy/D)$  definiuje położenie prążków. Pozostała część głębokość modulacji.

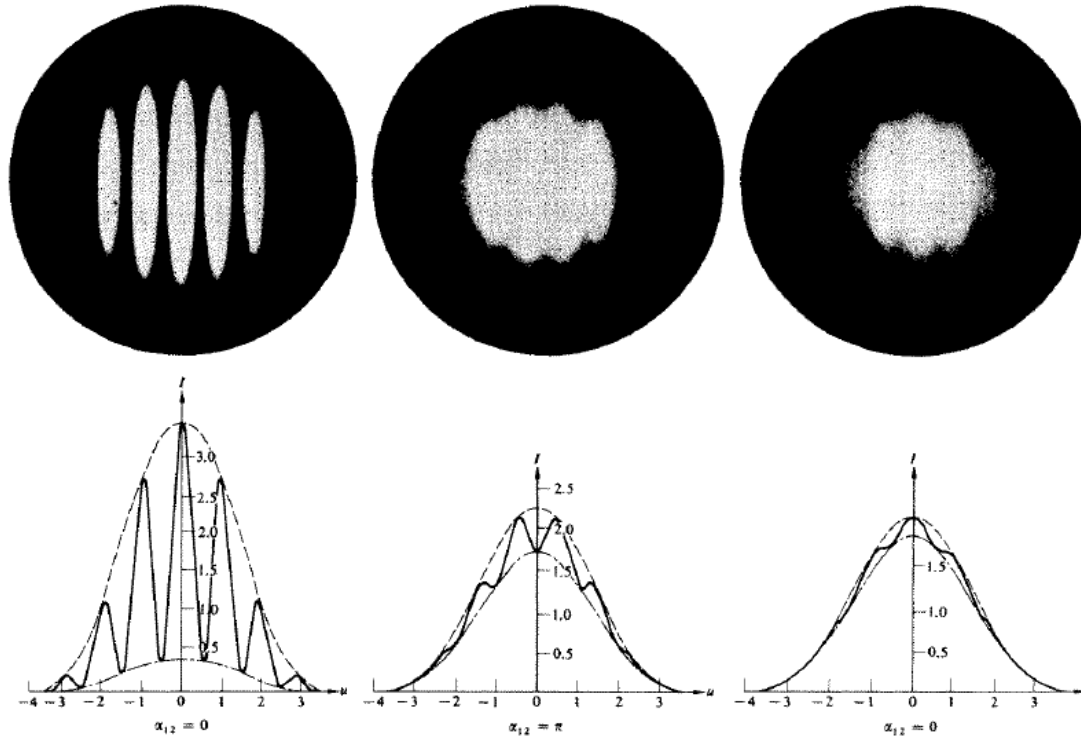
Gdy odległość między szczelinami  $h$  wzrasta, amplituda  $\gamma(h)$  ma tendencję do zmniejszania się, aż intensywność na ekranie stanie się jednolita.

Widoczność prążków:  $V(h) = |\gamma(h)|$

Droga koherencji:  $h_c \equiv 2 \int_0^{\infty} |\gamma(h)|^2 dh$

# Koherencja przestrzenna

Widoczność prążków przy malejącej spójności przestrzennej:





Dla dowolnego oświetlenia (nieidealne źródło punktowe, efekt Dopplera, itd.):

$$u_2(x_2, y_2, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1, y_1, t) \underbrace{h(x_2 - x_1, y_2 - y_1)}_{\text{odpowiedź impulsowa}} dx_1 dy_1$$

(w ogólności zależność o czasie ale fala quasi-monochromatyczna i wolno zmienna amplituda)

Rozkład natężenia w obrazie (średnia po czasie):

$$I_2(x_2, y_2) = \langle u_2(x_2, y_2, t) u_2^*(x'_2, y'_2, t) \rangle$$

$$I_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u_0(x_1, y_1, t) u_0^*(x'_1, y'_1, t) \rangle \langle h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) h^*(x_2 - x'_1, y_2 - y'_1) \rangle dx_1 dy_1$$

Rozkład natężenia w obrazie zależy od uśrednionego po czasie kwadratu modułu amplitudy zespolonej w przedmiocie.

# Obrazowanie z oświetleniem koherentnym

Całkowita spójność (pełna korelacja między wszystkimi falami)

$$I_2(x_2, y_2) = \left| \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1, y_1) h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 \right|^2$$

wzory jak wcześniej czyli:

$$u_2(x_2, y_2, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1, y_1, t) h(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1$$

Rozkład amplitudy zespolonej = splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową układu

Poszczególne fale najpierw ze sobą interferują a dopiero na ekranie dostają sygnał natężeniowy.

# Obrazowanie z oświetleniem koherentnym

Odpowiedź impulsowa dla układu gdzie mamy jakąś aperturę  $P$ :

$$h(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_2 x, \lambda d_2 y) \exp[-i2\pi(x_2 x + y_2 y)]$$

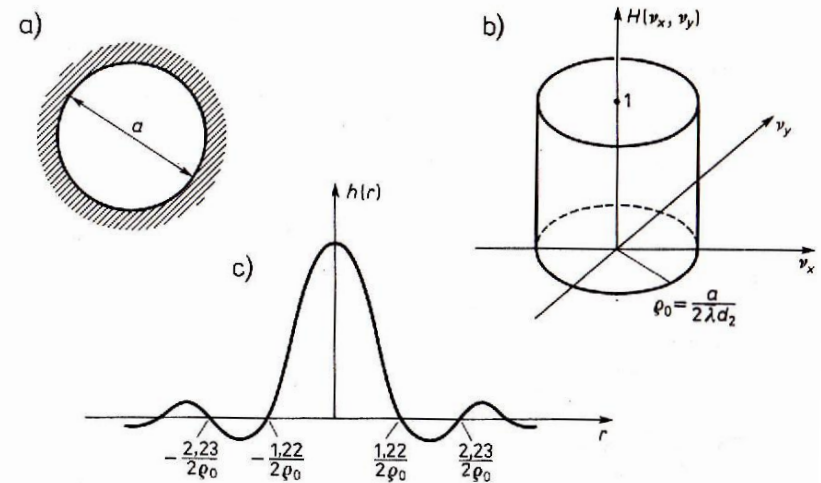
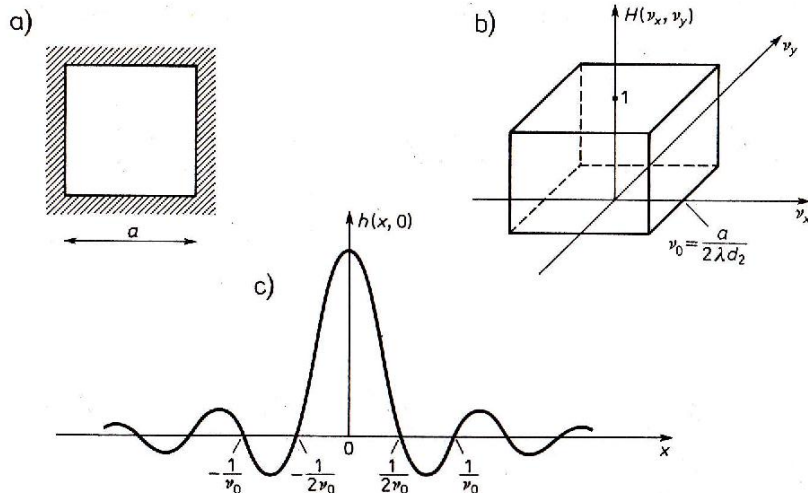
Funkcja przenoszenia (Funkcja przenoszenia dla oświetlenia koherentnego):

$$H(v_x, v_y) = FT\{h(x_2, y_2)\} = FT\{FT\{P(c, \lambda d_2 y)\}\} = P(-\lambda d_2 x, -\lambda d_2 y)$$

równa się odwróconej funkcji źrenicy.

Można też zapisać:  $U_2(v_x, v_y) = H(v_x, v_y)U_0(v_x, v_y)$  bo:  $u_2(x_2, y_2, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1, y_1, t)h(x_2 - x_1, y_2 - y_1)dx_1 dy_1$

Plot funkcji przenoszenia z sygnałem wejściowym



# Obrazowanie z oświetleniem nie koherentnym

Całkowita przypadkowość faz i miejsca wychodzenia fal z przedmiotu = brak korelacji

$$\langle u_0(x_1, y_1, t) u_0^*(x'_1, y'_1, t) \rangle = K I_0(x_1, y_1) \delta(x_1 - x'_1, y_1 - y'_1)$$

2 fale nie interferują ze sobą ale od razu biorę ich natężenie

$$I_2(x_2, y_2) = K \iint_{-\infty}^{\infty} I_0(x_1, y_1) |h(x_2 - x_1, y_2 - y_1)|^2 dx_1 dy_1$$

stała

natężenie w obrazie

kwadrat funkcji przenoszenia  
(natężeniowa funkcja przenoszenia)

# Obrazowanie z oświetleniem nie koherentnym

Mogę to ogólnie zapisać jako:

$$I_2(x_2, y_2) = KI_0(x_2, y_2) \otimes |h(x_2, y_2)|^2$$

Jak przejdziemy do przestrzeni częstości:

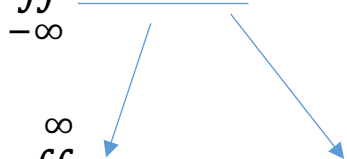
$$I_2(v_x, v_y) = I_0(v_x, v_y) \tilde{H}(v_x, v_y)$$

Natężeniowa funkcja przenoszenia (Funkcja przenoszenia dla oświetlenia niekoherentnego):

$$\tilde{H}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)|^2 \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$

# Obrazowanie z oświetleniem nie koherentnym

Relacja między funkcją przenoszenia koherentną a niekoherentną:

$$\tilde{H}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)|^2 \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$


The diagram shows two blue arrows originating from the expression  $|h(x, y)|^2$  in the first equation. One arrow points to  $H(v'_x, v'_y)$  in the second equation, and the other points to  $H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y)$  in the second equation, illustrating the decomposition of the magnitude squared into a product of the function and its complex conjugate.

$$\tilde{H}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H(v'_x, v'_y) H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y) dv'_x dv'_y$$

Po zamianie zmiennych:

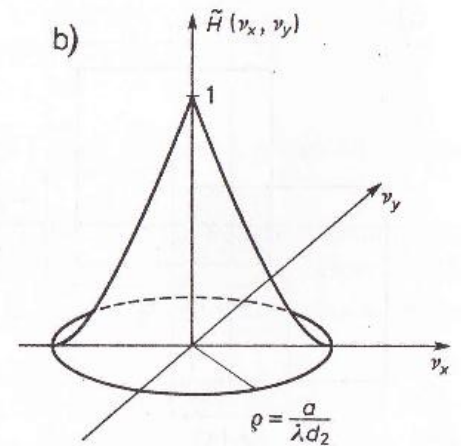
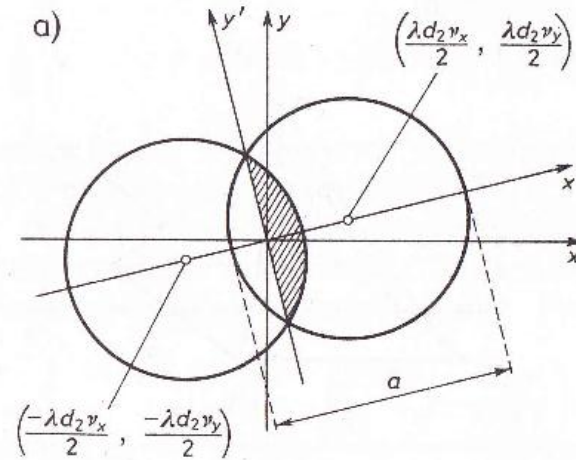
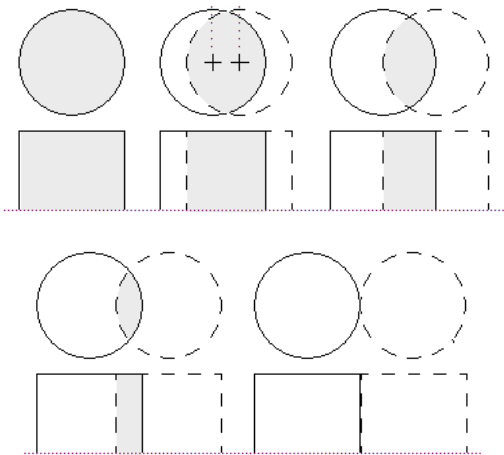
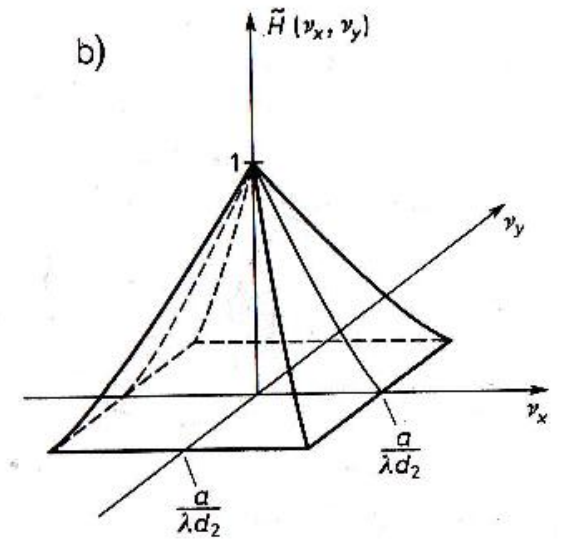
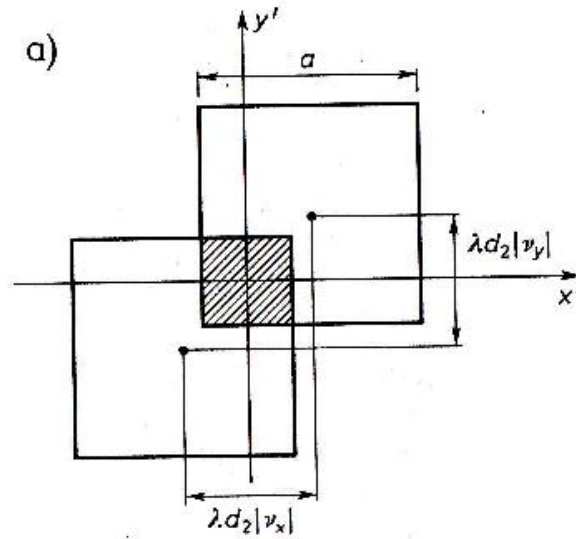
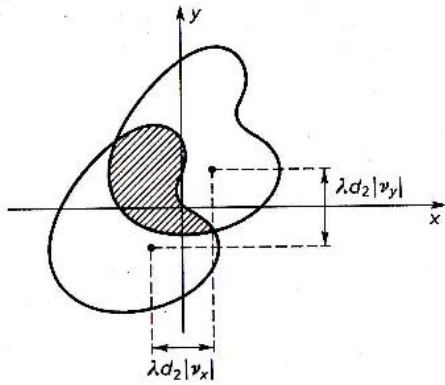
$$\tilde{H}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H\left(v'_x - \frac{v_x}{2}, v'_y - \frac{v_y}{2}\right) H^*\left(v'_x + \frac{v_x}{2}, v'_y + \frac{v_y}{2}\right) dv'_x dv'_y$$

Odpowiedź impulsowa dla układu gdzie mamy jakąś aperturę  $P$ :

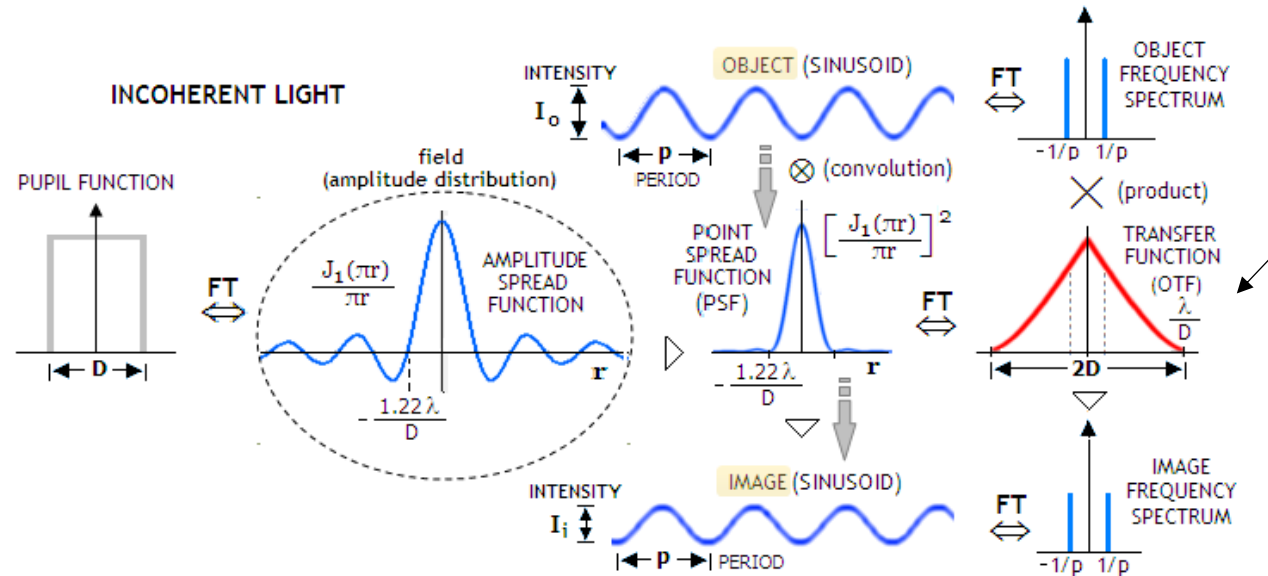
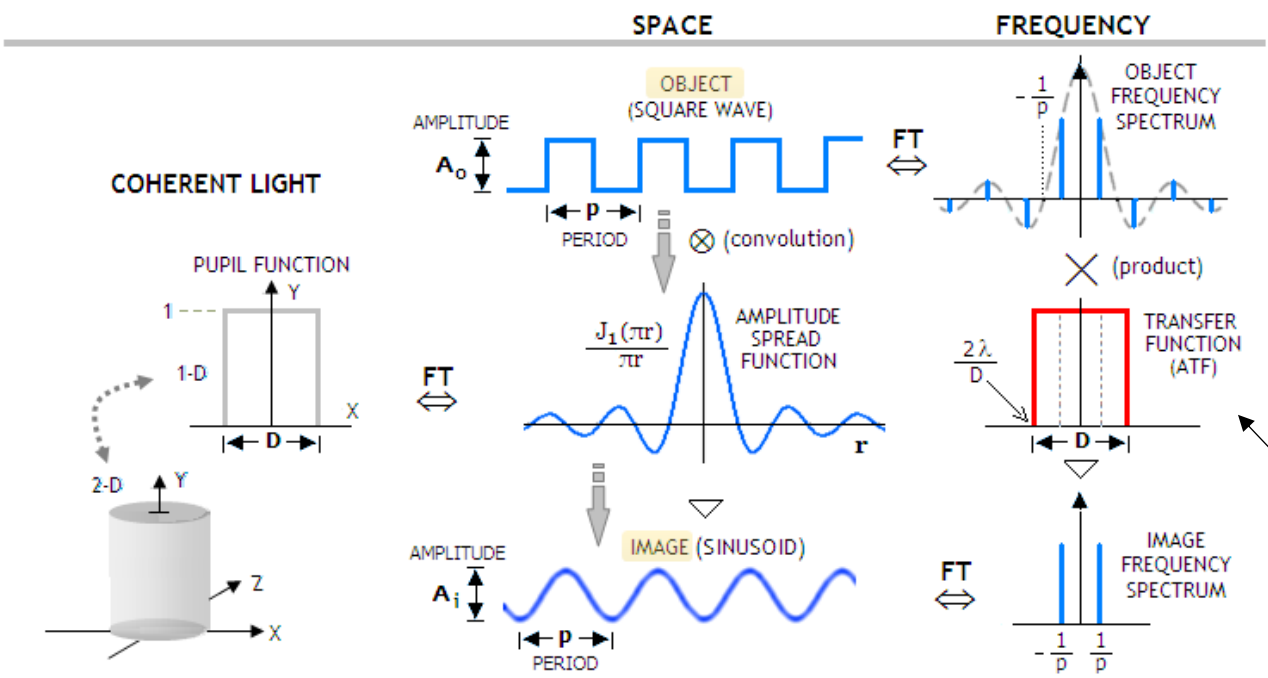
$$\tilde{H}(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} P\left(x - \frac{\lambda d_2 x}{2}, y - \frac{\lambda d_2 y}{2}\right) P\left(x + \frac{\lambda d_2 x}{2}, y + \frac{\lambda d_2 y}{2}\right) dv'_x dv'_y$$

Czyli odpowiedź impulsowa jak odpowiedź od 2 rozsuniętych apertur.

# Obrazowanie z oświetleniem nie koherentnym



# Obrazowanie z oświetleniem nie koherentnym



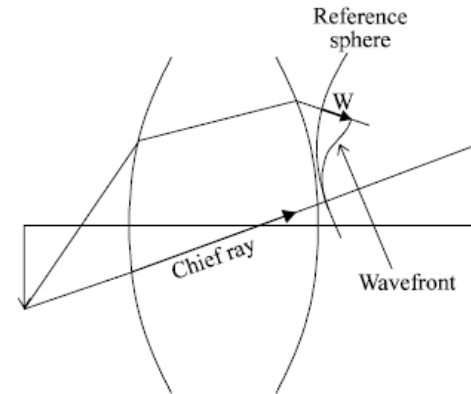
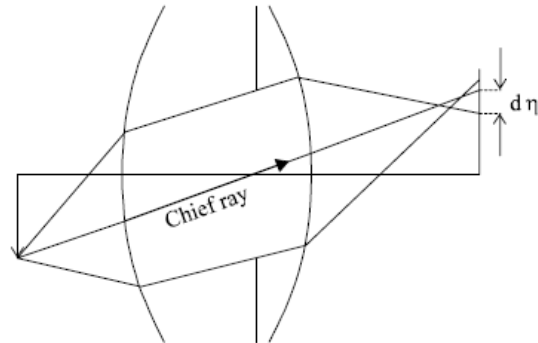
Modyfikacja funkcji przenoszenia



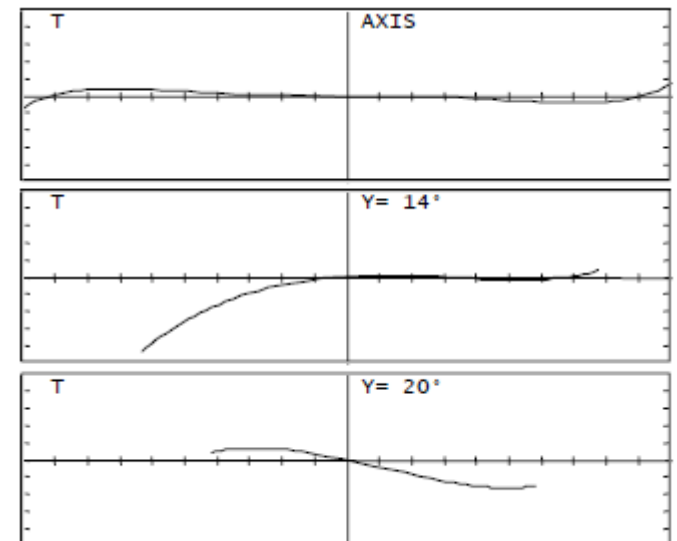
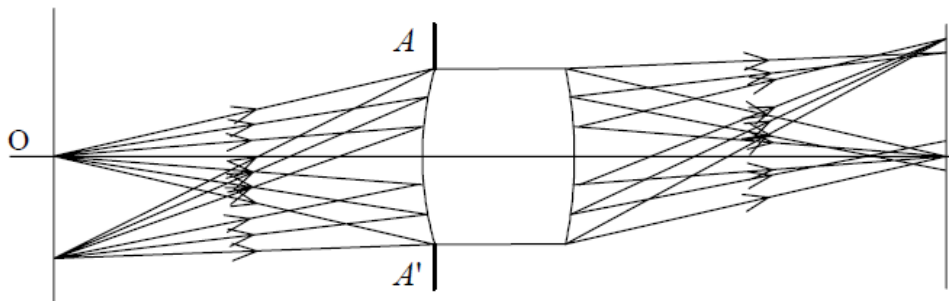
# Aberracje

Aberracje możemy opisywać na 2 sposoby:

- bieg promieni (optyka geometryczna)
- różnice w drogach optycznych (front falowy)

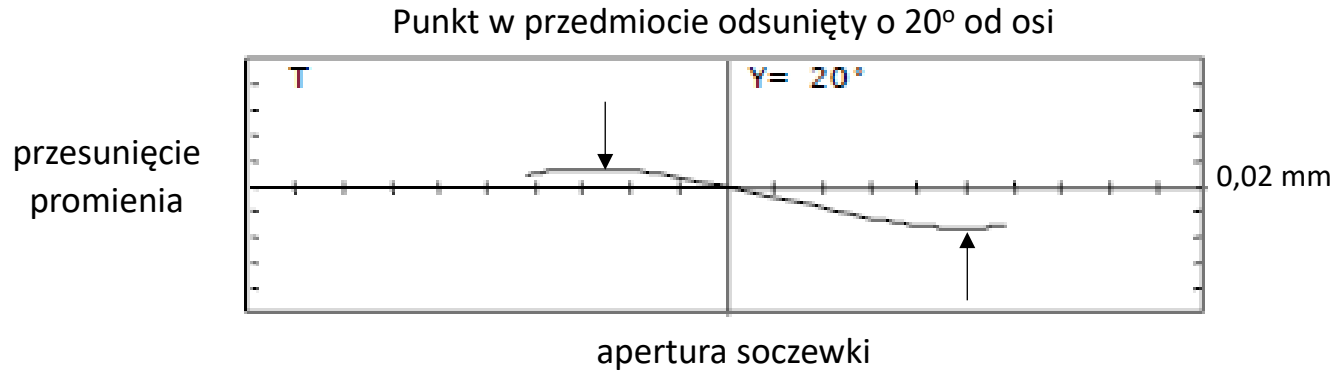


W optyce geometrycznej aberrację możemy określić na podstawie analizy biegu promieni w kilku punktach obrazu:



wykras zależności przesunięcia promienia na ekranie od kąta lub położenia w aperturze soczewki

# Aberracje

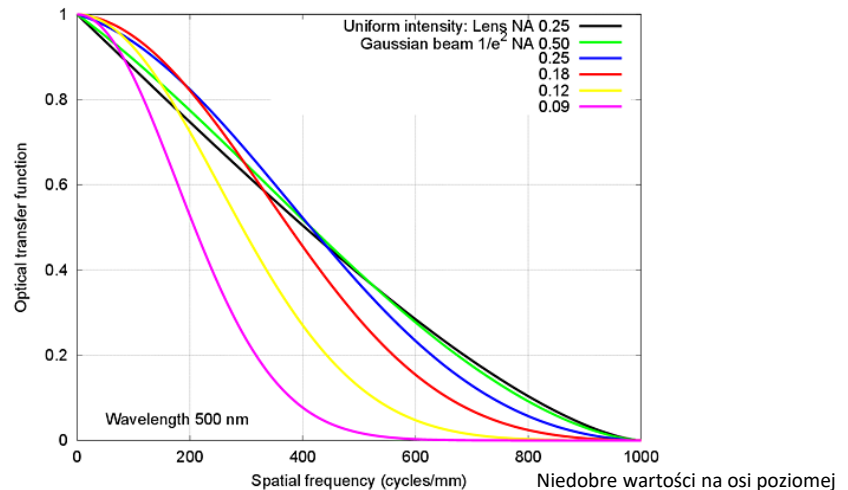


Maksymalna ujemna aberracja (-0,04 mm) dwa razy większa niż maksymalna dodatnia (0,02 mm).

Rozmycie plamki = 0,06 mm.

Jest to przybliżony limit rozdzielczości soczewki (układu optycznego)

W przypadku **funkcji przenoszenia** jej wartość spadnie do niewielkiej wartości przy około  $16 \text{ mm}^{-1}$  ( $0,06 \sim 1/16$ ).



Z analizy tego typu dostajemy diagramy plamkowe:

## Spherical Aberration



## Coma

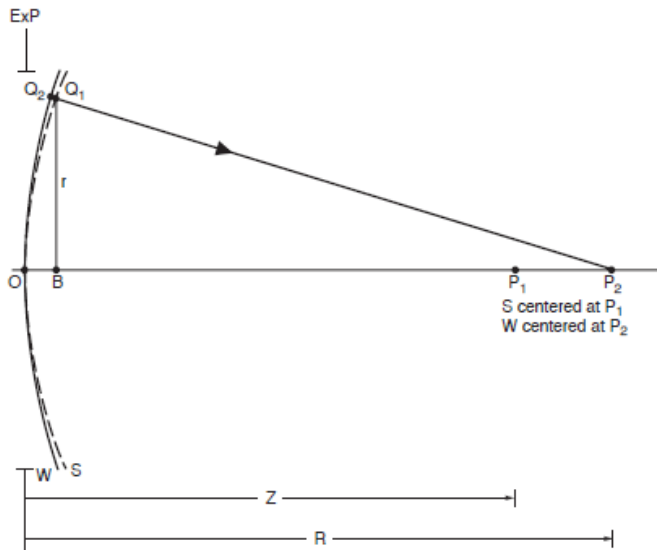


## Astigmatism



# Aberracje

Rozogniskowanie: Inny punkt obserwacji P2 niż zbieg promieni P1



Interesuje nas różnica w odstępstwie frontu falowego  $W$ : 
$$W(r) = \frac{n_i}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{R} \right) r^2$$

Przybliżenie  $z \approx R$  (małe rozogniskowanie): 
$$W(r) \simeq -\frac{n}{2} \frac{\Delta}{R^2} r^2$$

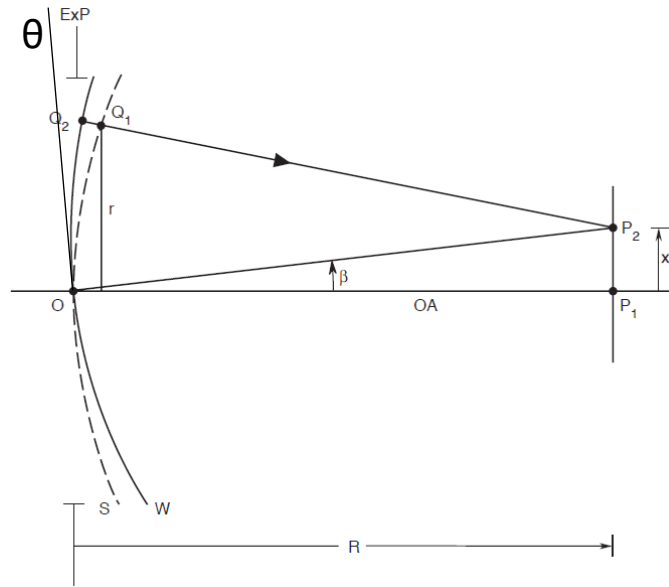
gdzie  $\Delta = z - R$  jest miarą rozogniskowania

Częściej zależności tego typu podaje się nie od  $r$  ale  $\rho$ :  $\rho = r/a$  (a – apertura)

$$W(\rho) = B_d \rho^2 \quad B_d - \text{stała}$$

# Aberracje

Pochylenie czoła fali:



Dla b. małego pochylenia:

$$z \approx R \quad \tan(\beta) = \beta$$

$$W(r) \approx -\frac{n}{2} \frac{\Delta}{R^2} r^2$$

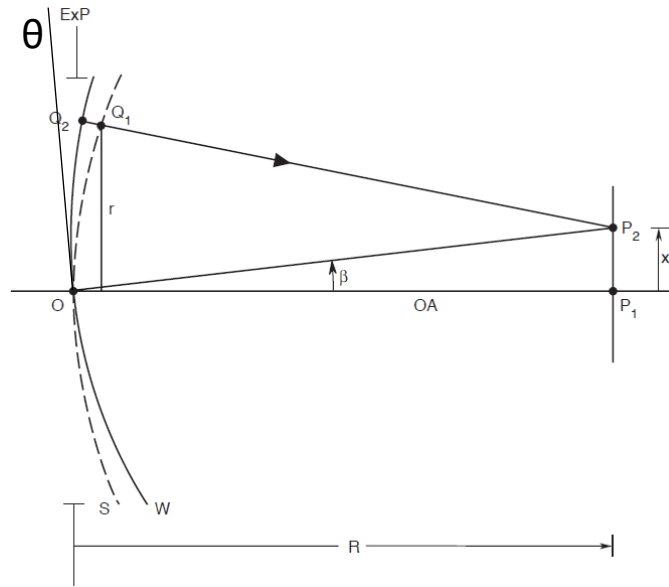
Interesuje nas różnica w odstępstwie frontu falowego  $W$ :  $W(r, \theta) = n\beta r \cos \theta$

Funkcja  $r \cos(\theta)$  zapewnia nam pochylenie całej płaszczyzny względem osi optycznej.

Zależność od  $\rho$ :  $W(\rho, \theta) = B_t \rho \cos \theta$   $B_t$  - stała

# Aberracje

Pochylenie czoła fali:



Dla b. małego pochylenia:

$$z \approx R \quad \tan(\beta) = \beta$$

$$W(r) \approx -\frac{n}{2} \frac{\Delta}{R^2} r^2$$

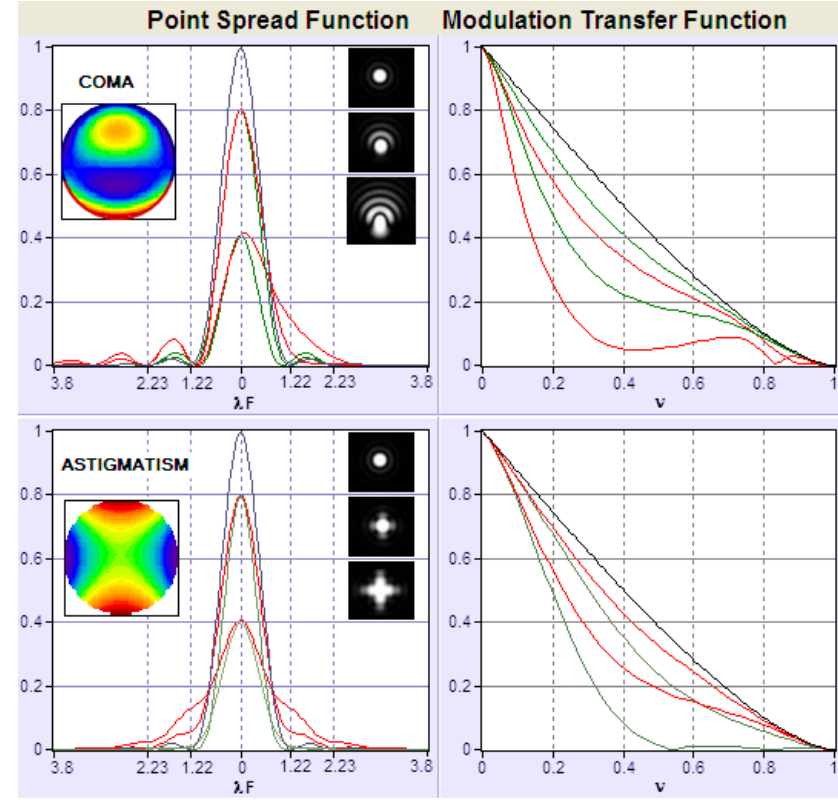
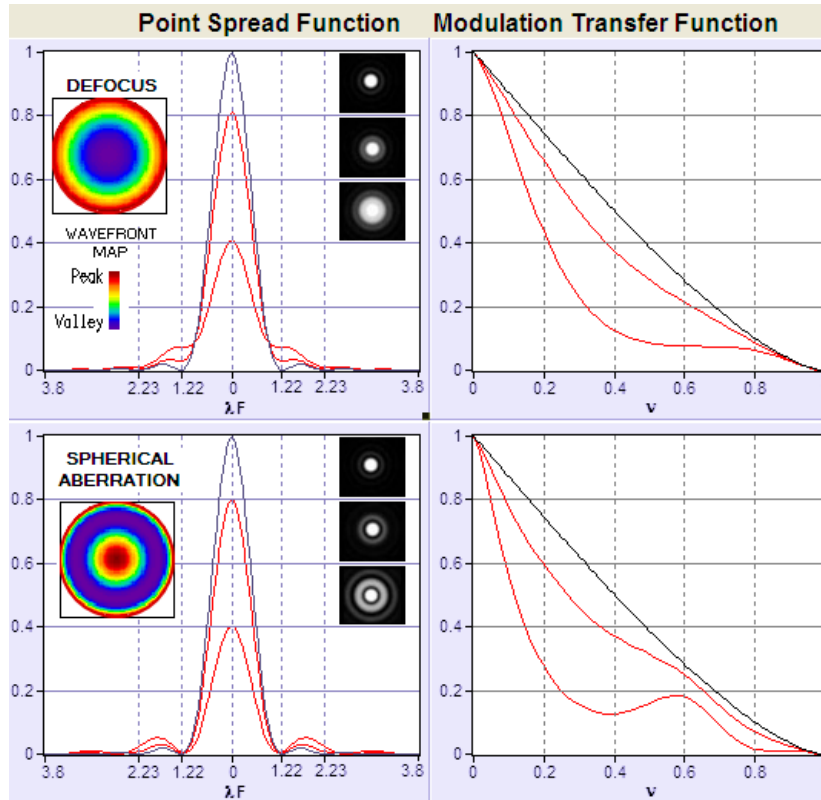
Interesuje nas różnica w odstępstwie frontu falowego  $W$ :  $W(r, \theta) = n\beta r \cos \theta$

Funkcja  $r \cos(\theta)$  zapewnia nam pochylenie całej płaszczyzny względem osi optycznej.

Zależność od  $\rho$ :  $W(\rho, \theta) = B_t \rho \cos \theta$   $B_t$  - stała

# Aberracje dla układów obrotowo symetrycznych

Aberracje wpływają na funkcję przenoszenia:



# Aberracje Seidela

Część wyrazów można wyeliminować np. te gdy:  $2p + m = 0$

Bo wtedy nie ma zależności od  $r$  a dla  $r=0$  nie ma aberracji

Aberracje Seidela są aberracjami pierwszorzędowymi.

Po wyeliminowaniu członów, które się zerują:

$$W(r, \theta; h') = {}_0a_{40}r^4 + {}_1a_{31}h'r^3 \cos\theta + {}_2a_{22}h'^2r^2 \cos^2\theta + {}_2a_{20}h'^2r^2 + {}_3a_{11}h'^3r \cos\theta \quad ,$$

$l$	$n$	$m$	$2l + m$	Aberration Term ${}_{2l+m}a_{nm}h'^{2l+m}r^n \cos^m\theta$	Aberration Name*
0	4	0	0	${}_0a_{40}r^4$	Spherical
0	3	1	1	${}_1a_{31}h'r^3 \cos\theta$	Coma
0	2	2	2	${}_2a_{22}h'^2r^2 \cos^2\theta$	Astigmatism
1	2	0	2	${}_2a_{20}h'^2r^2$	Field curvature
1	1	1	3	${}_3a_{11}h'^3r \cos\theta$	Distortion



# Aberracje Seidela

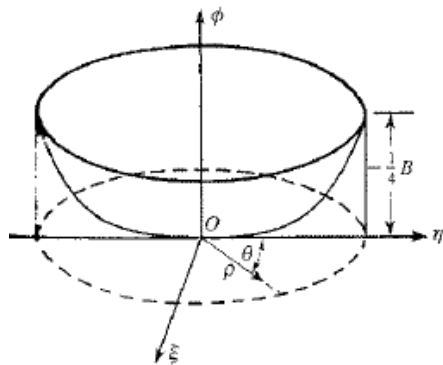
To samo w zależności od  $\rho$ :

$$W(\rho, \theta) = A_s \rho^4 + A_c \rho^3 \cos \theta + A_a \rho^2 \cos^2 \theta + A_d \rho^2 + A_t \rho \cos \theta$$

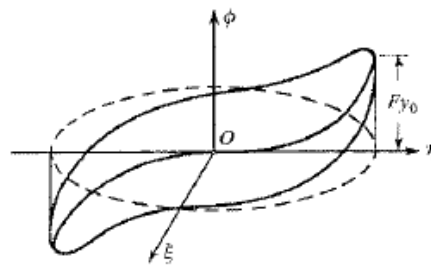
gdzie w stałych  $A$  zawarte są  $a$  i  $h'$ :

$$A_c = a_c h' a^3, \quad A_a = a_a h'^2 a^2, \quad A_d = a_d h'^2 a^2, \quad A_t = a_t h'^3 a$$

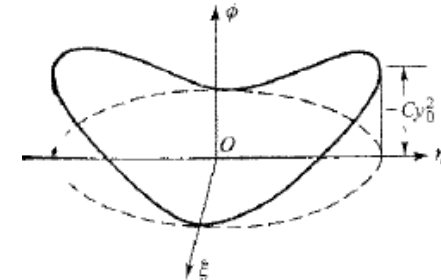
Aberracja sferyczna



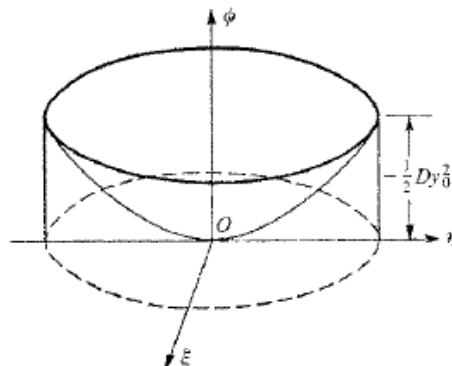
Coma



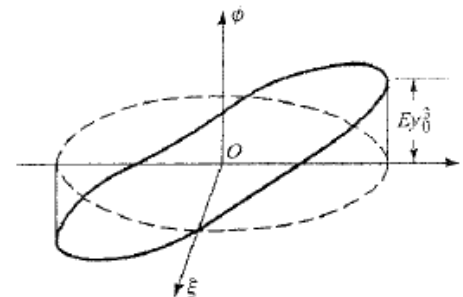
Astygmatyzm



Krzywizna pola



Dystorsja



# Aberracje wyższych rzędów

Aberracje drugorzędowe:

$l$	$n$	$m$	$2l + m$	Aberration Term ${}_{2l+m}a_{nm}h'^{2l+m}r^n \cos^m \theta$	Aberration Name
0	6	0	0	${}_0a_{60}r^6$	Spherical*
0	5	1	1	${}_1a_{51}h'r^5 \cos \theta$	Coma*
0	4	2	2	${}_2a_{42}h'^2r^4 \cos^2 \theta$	Astigmatism* (wings or Flügelfehler)
0	3	3	3	${}_3a_{33}h'^3r^3 \cos^3 \theta$	Arrows or Pfeilfehler
1	4	0	2	${}_2a_{40}h'^2r^4$	Lateral spherical
1	3	1	3	${}_3a_{31}h'^3r^3 \cos \theta$	Lateral coma
1	2	2	4	${}_4a_{22}h'^4r^2 \cos^2 \theta$	Lateral astigmatism
2	2	0	4	${}_4a_{20}h'^4r^2$	(Lateral) field curvature*
2	1	1	5	${}_5a_{11}h'^5r \cos \theta$	(Lateral) distortion*

# Wielomiany Zernikego

- Szereg Taylora
- Szeregi funkcyjne
- Suma sinusów
- Baza ortonormalna (iloczyn skalarny = 0):  $\{(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)\}$

Wielomiany Zernikego – baza ortonormalna zdefiniowana w kole o promieniu 1:

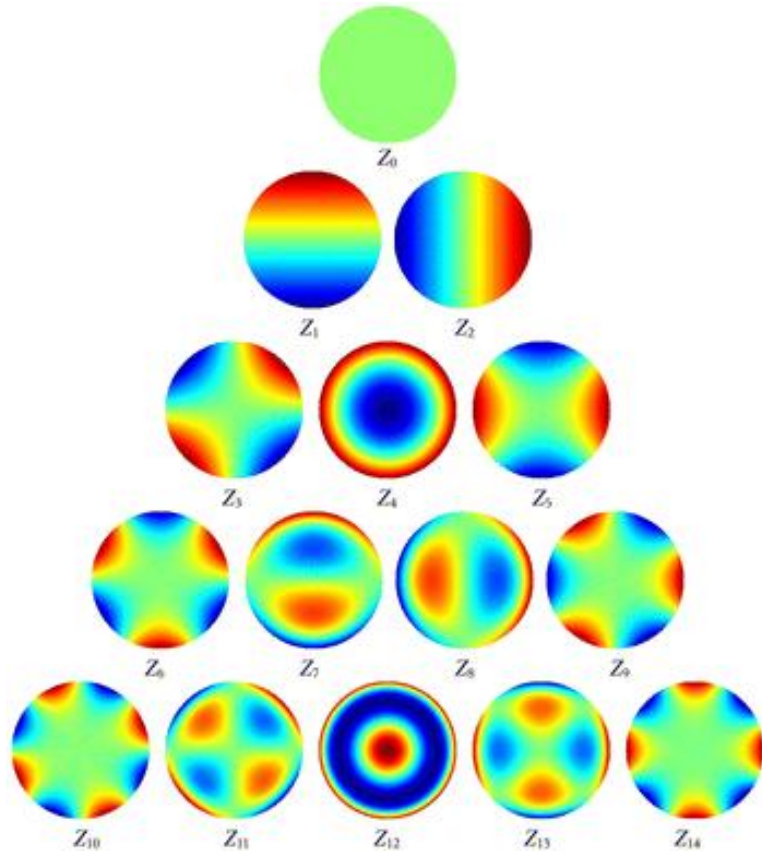
$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{nm} Z_n^m(\rho, \theta)$$

gdzie:  $Z_n^m(\rho, \theta) = [2(n+1)/(1+\delta_{m0})]^{1/2} R_n^m(\rho) \cos m\theta$

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}$$

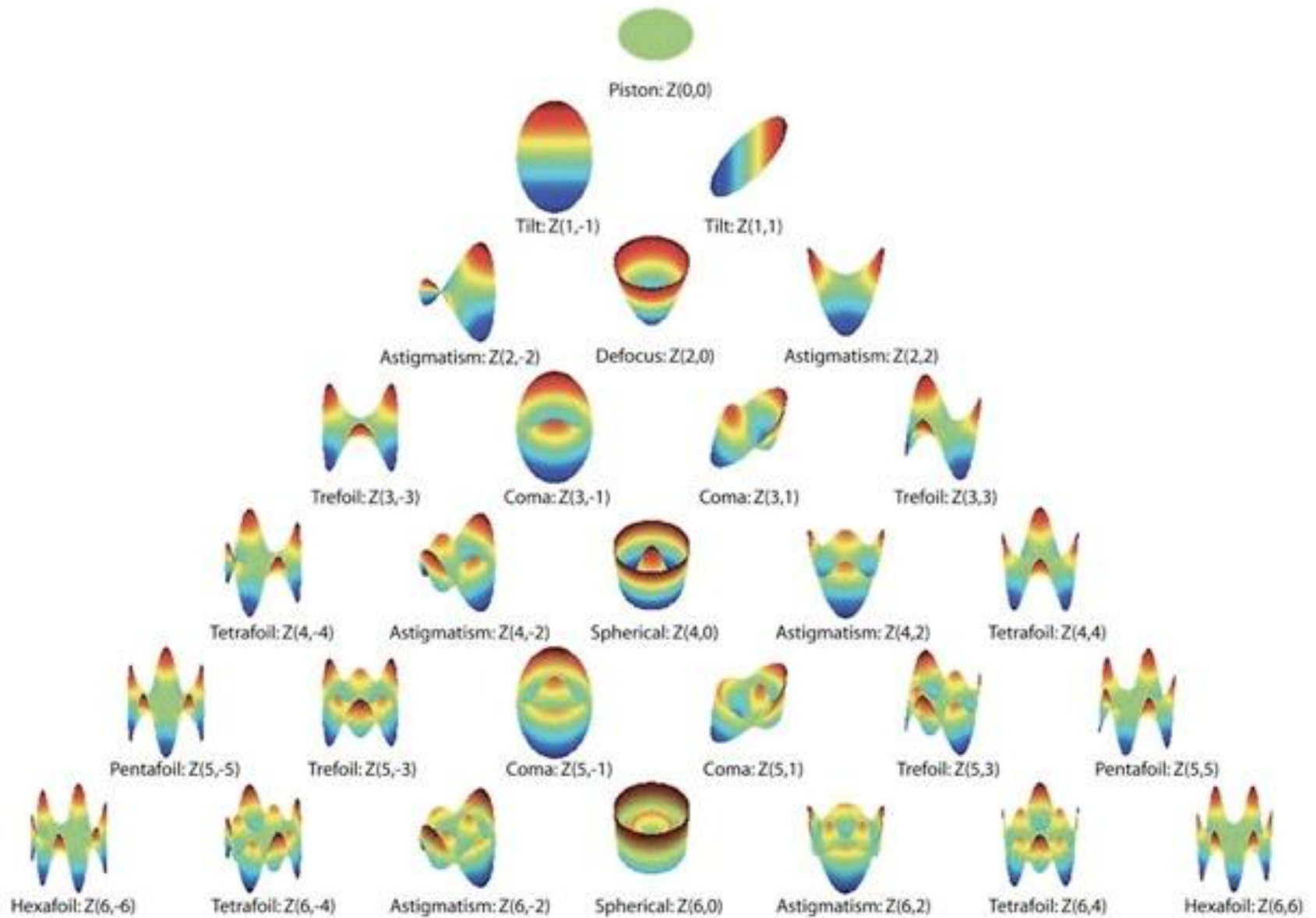
Dla układów o symetrii kołowej:  $\cos(m\theta) = 1$

# Wielomiany Zernikego



$n$	$m$	Orthonormal Zernike Polynomial	Aberration Name*
0	0	1	Piston
1	1	$2\rho \cos \theta$	Distortion (tilt)
2	0	$\sqrt{3} (2\rho^2 - 1)$	Field curvature (defocus)
2	2	$\sqrt{6} \rho^2 \cos 2\theta$	Primary astigmatism
3	1	$\sqrt{8} (3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	Primary coma
3	3	$\sqrt{8} \rho^3 \cos 3\theta$	
4	0	$\sqrt{5} (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Primary spherical
4	2	$\sqrt{10} (4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	Secondary astigmatism
4	4	$\sqrt{10} \rho^4 \cos 4\theta$	
5	1	$\sqrt{12} (10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	Secondary coma
5	3	$\sqrt{12} (5\rho^5 - 4\rho^3) \cos 3\theta$	
5	5	$\sqrt{12} \rho^5 \cos 5\theta$	
6	0	$\sqrt{7} (20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	Secondary spherical
6	2	$\sqrt{14} (15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \cos 2\theta$	Tertiary astigmatism
6	4	$\sqrt{14} (6\rho^6 - 5\rho^4) \cos 4\theta$	
6	6	$\sqrt{14} \rho^6 \cos 6\theta$	
7	1	$4 (35\rho^7 - 60\rho^5 + 30\rho^3 - 4\rho) \cos \theta$	Tertiary coma
7	3	$4 (21\rho^7 - 30\rho^5 + 10\rho^3) \cos 3\theta$	
7	5	$4 (7\rho^7 - 6\rho^5) \cos 5\theta$	
7	7	$4\rho^7 \cos 7\theta$	
8	0	$3 (70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1)$	Tertiary spherical

# Wielomiany Zernikego



# Współczynnik Strehla

Współczynnik Strehla ( $S$ ) jest miarą jakości formowania obrazu optycznego.

$$0 \leq S \leq 1$$

Dla Idealnego, niezaburzonego układu optycznego:  $S=1$

$S$  definiowany jest jako stosunek natężenia obrazu na osi optycznej z aberracją ze źródła punktowego do natężenia na osi przy użyciu idealnego układu optycznego z uwzględnieniem ograniczenia dyfrakcyjnego.

współczynnik Strehl'a =  $\frac{\text{jasności w centrum plamki Airy dla badanego układu optycznego}}{\text{teoretyczna maksymalna jasność plamki Airy}}$

Określamy go przez błędy czoła fali:  $S = |\langle e^{i\phi} \rangle|^2 = |\langle e^{i2\pi\delta/\lambda} \rangle|^2$

Gdzie  $\phi = 2\pi\delta/\lambda$  jest błędem fazy w stosunku do sytuacji bez aberracji.

W przybliżeniu:  $S \approx e^{-\sigma^2}$

gdzie  $\sigma^2$  to odchylenie średniokwadratowe fazy czoła fali w aperturze (RMS):  $\sigma^2 = \langle (\phi - \bar{\phi})^2 \rangle$ .

Stosowany przede wszystkim dla układów dobrze skorygowanych:  
małe aberracje, mała turbulencja, blisko ograniczenia dyfrakcyjnego.

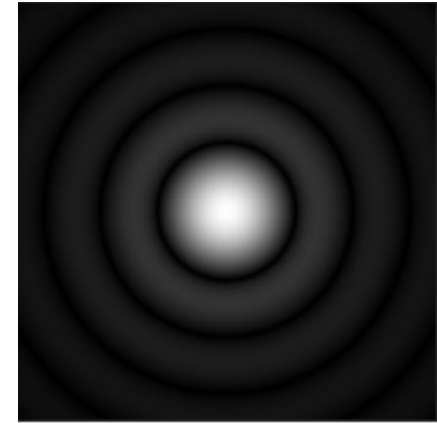
# Współczynnik Strehla

Weźmy układ z aperturą kołową.

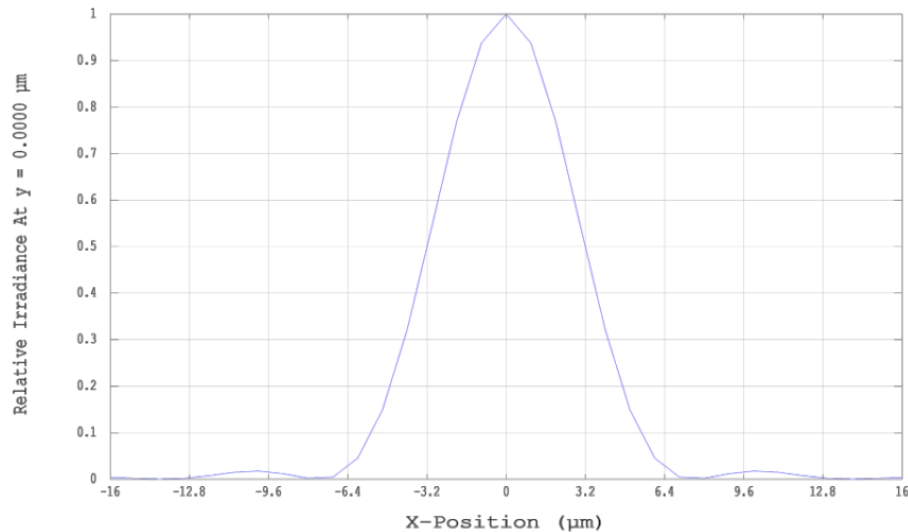
Odpowiedzią impulsową idealnego układu jest plamka Airy'ego.

Maksymalne natężenie w środku plamki.

Odpowiedź impulsowa dla takiego samego ale rzeczywistego układu (obarczony aberracjami) jest szersza. Maksymalne natężenie jest mniejsze zgodnie ze współczynnikiem Strehla.

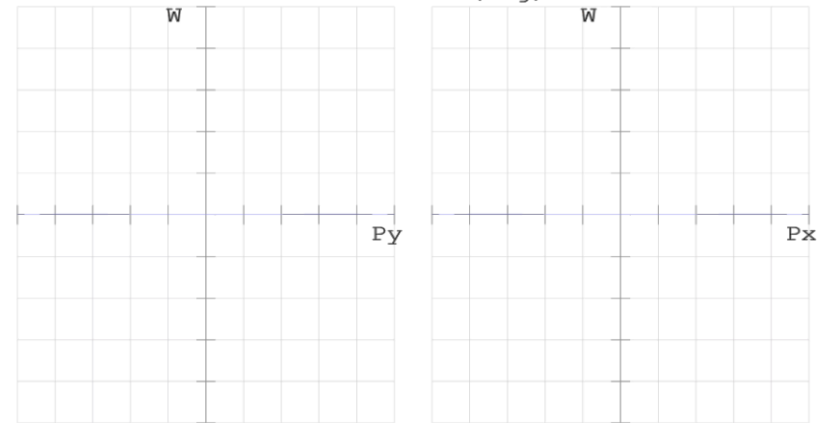


Odpowiedź impulsowa układu bez aberracji



brak aberracji

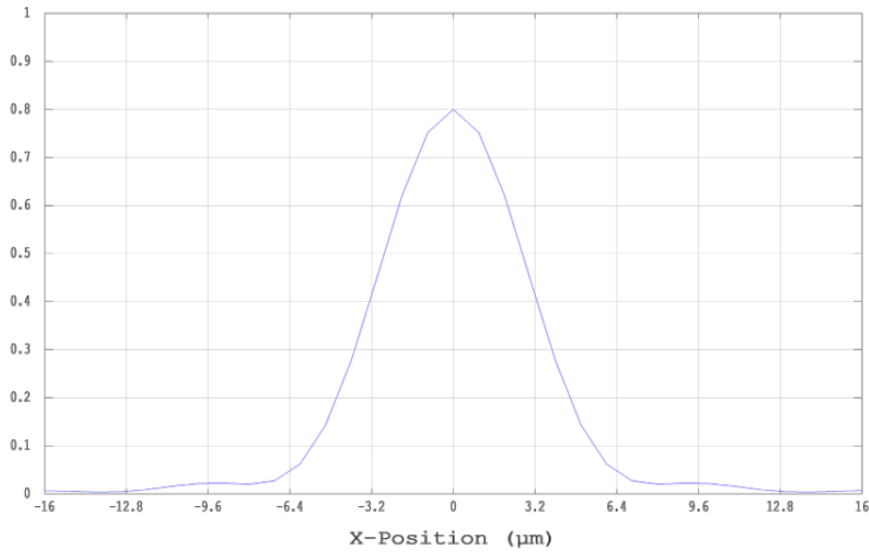
OBJ: 0.0000 (deg)



Optical Path Difference

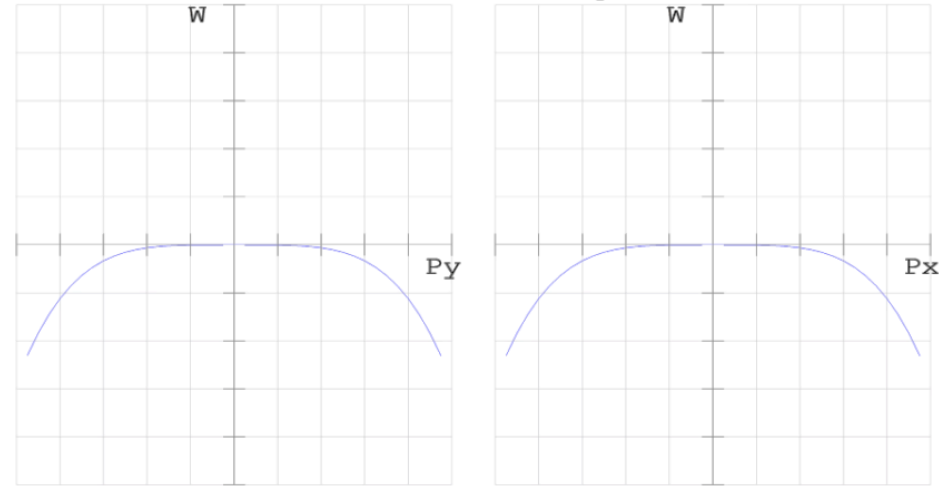
# Współczynnik Strehla

Odpowiedź impulsowa układu z aberracjami

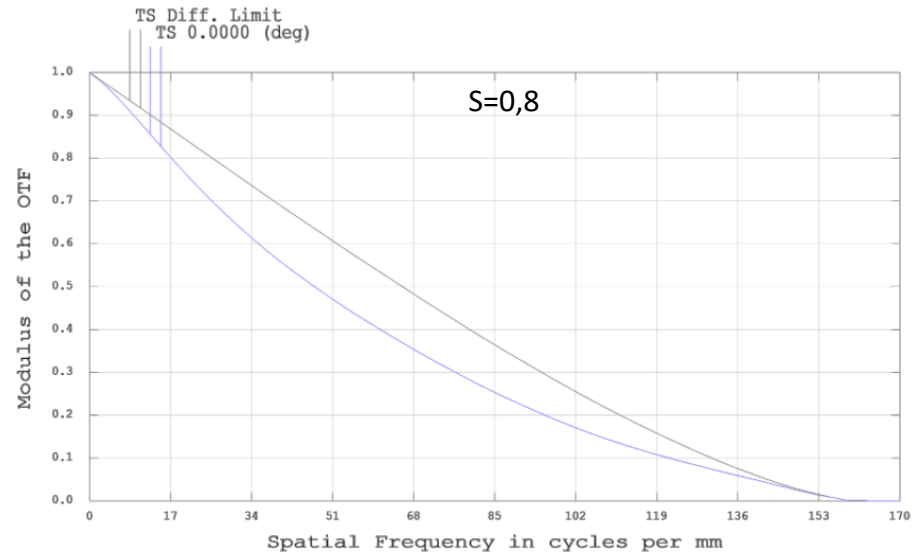
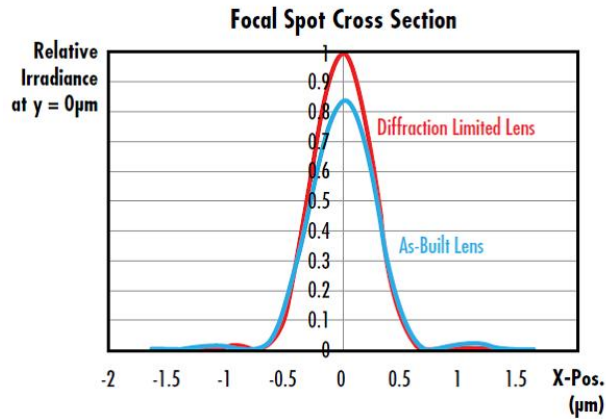


aberracje

OBJ: 0.0000 (deg)



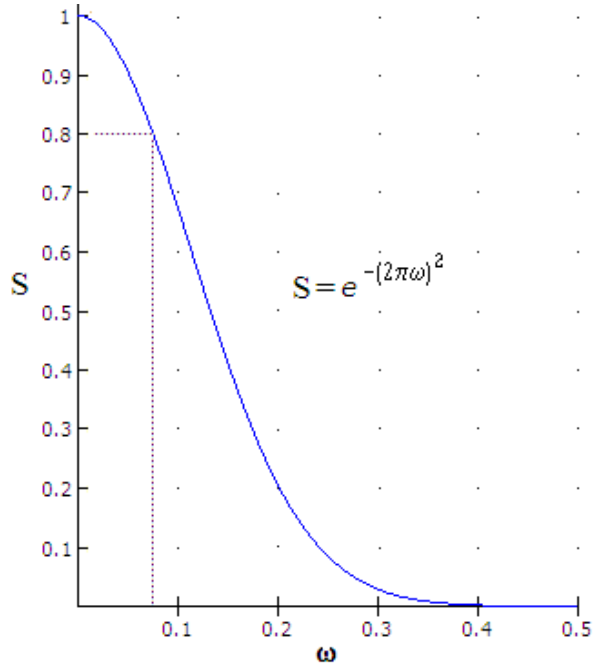
Przekłada się to na funkcję przenoszenia kontrastu



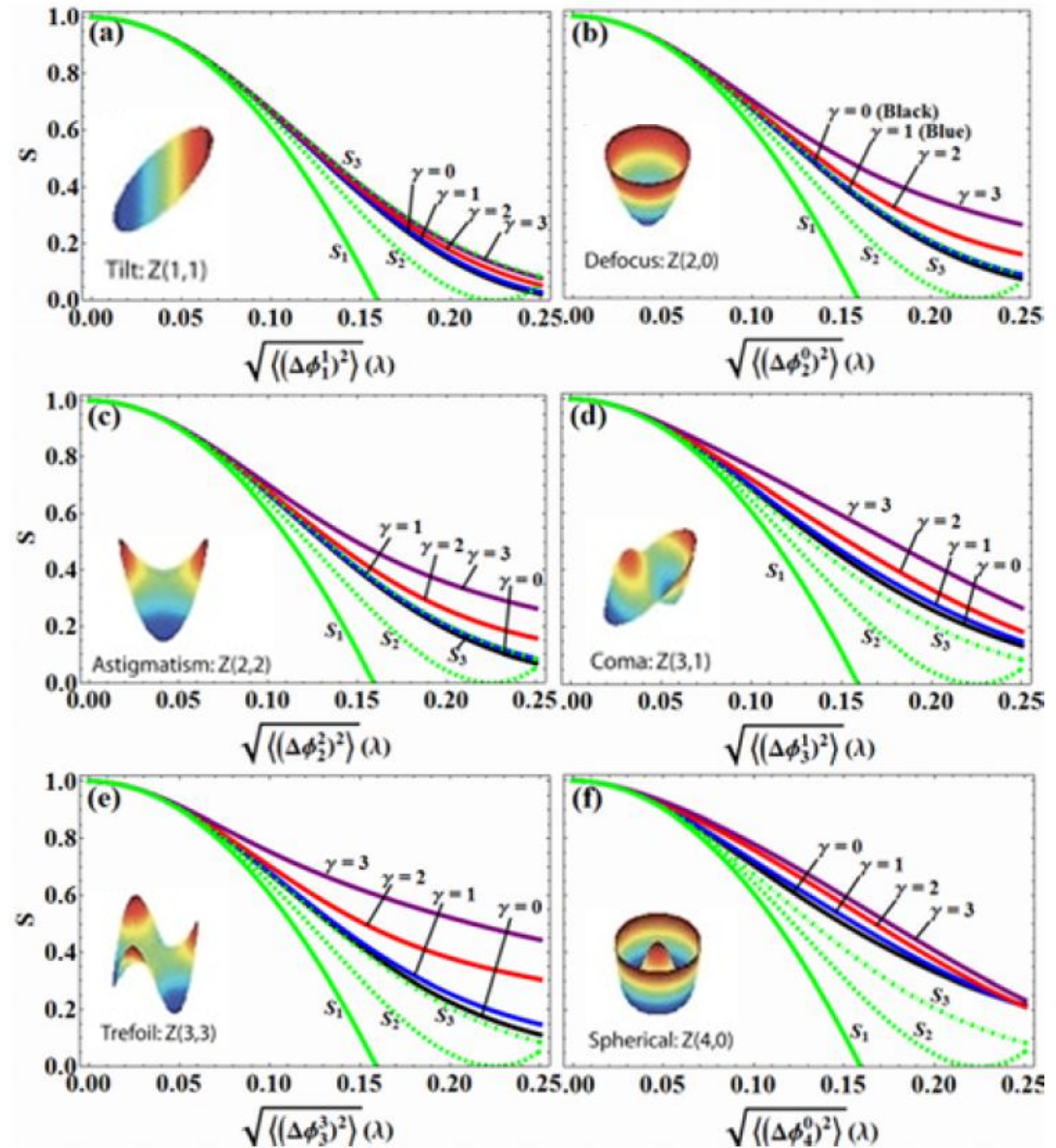


# Współczynnik Strehla

Zależność współczynnika Strehla od błędu frontu falowego

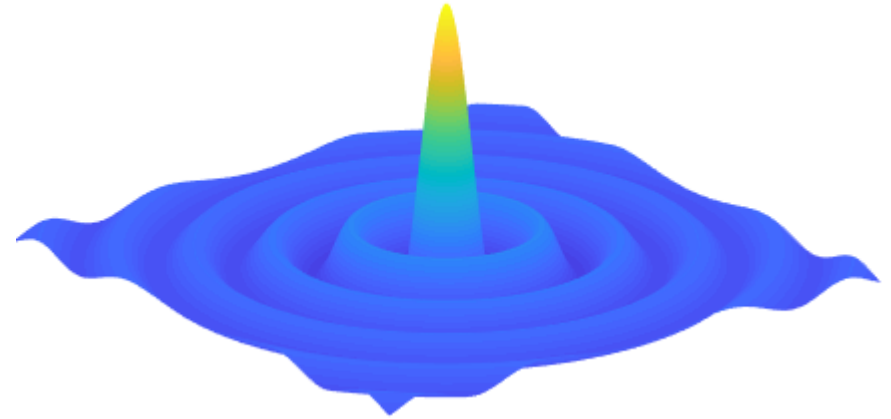
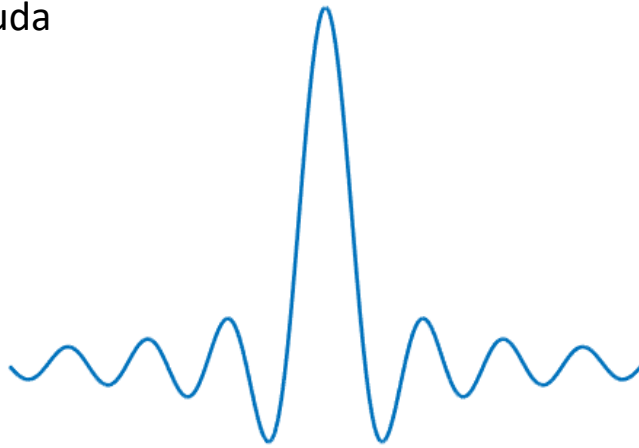


Współczynnika Strehla dla różnych aberracji

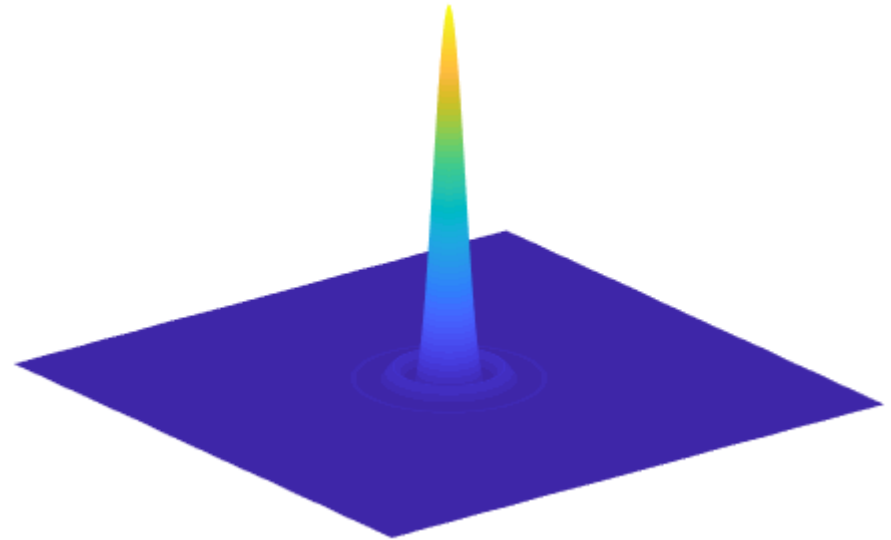
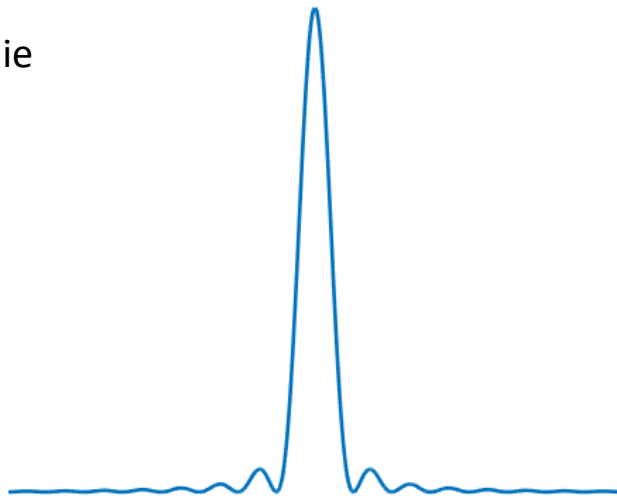


# Apodyzacja

Dla kołowej apertury:  
amplituda



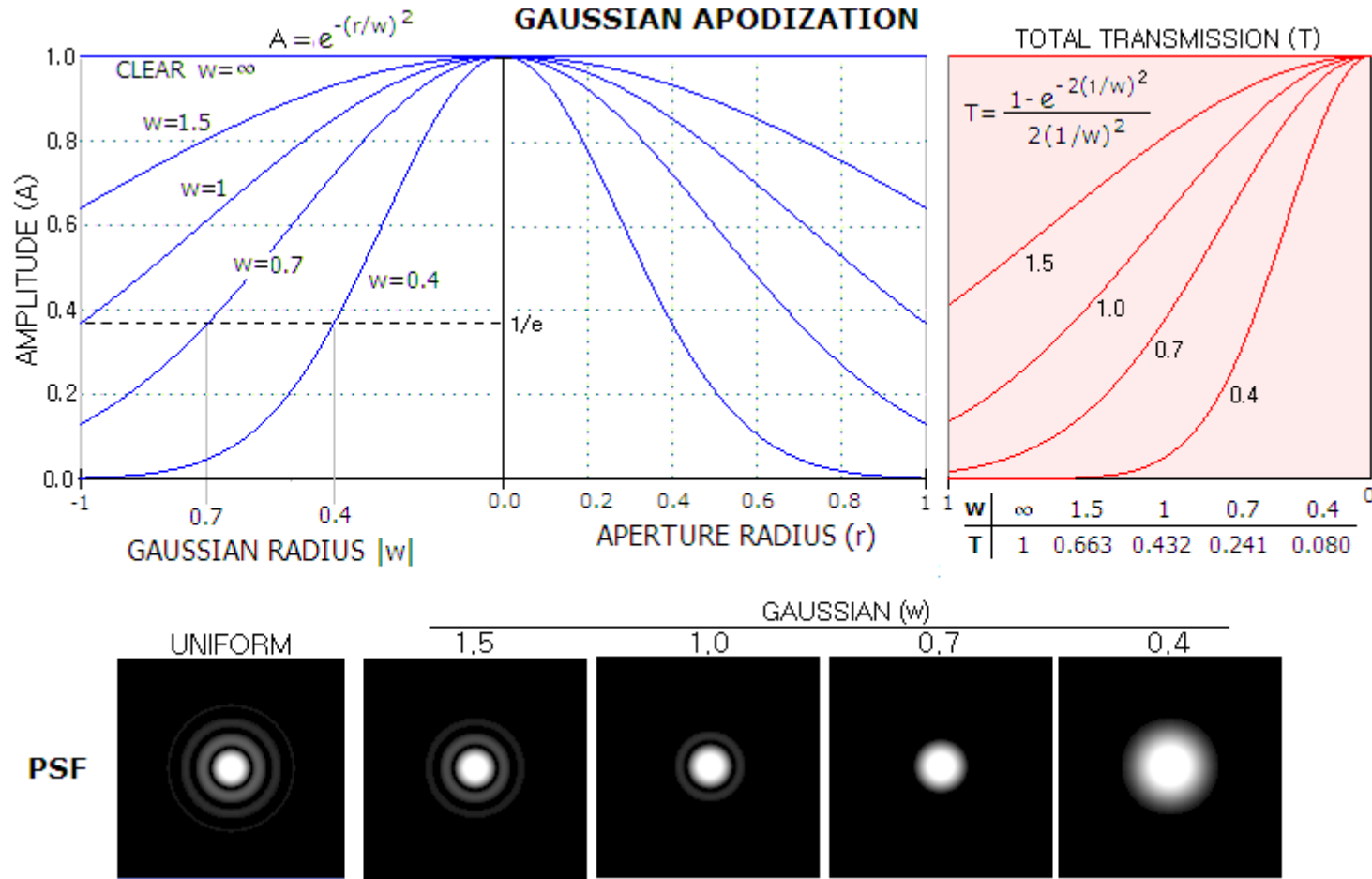
natężenie



Apodyzacja - Kompromis polegający na usunięciu maksimum bocznych kosztem poszerzenia maksimum głównego lub odwrotnie

# Apodyzacja

Modyfikuję funkcję przenoszenia przysłoną o zmiennej transmitancji



## APODIZING MASKS (H.R. SUITER)

