

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

WYKŁAD 5

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

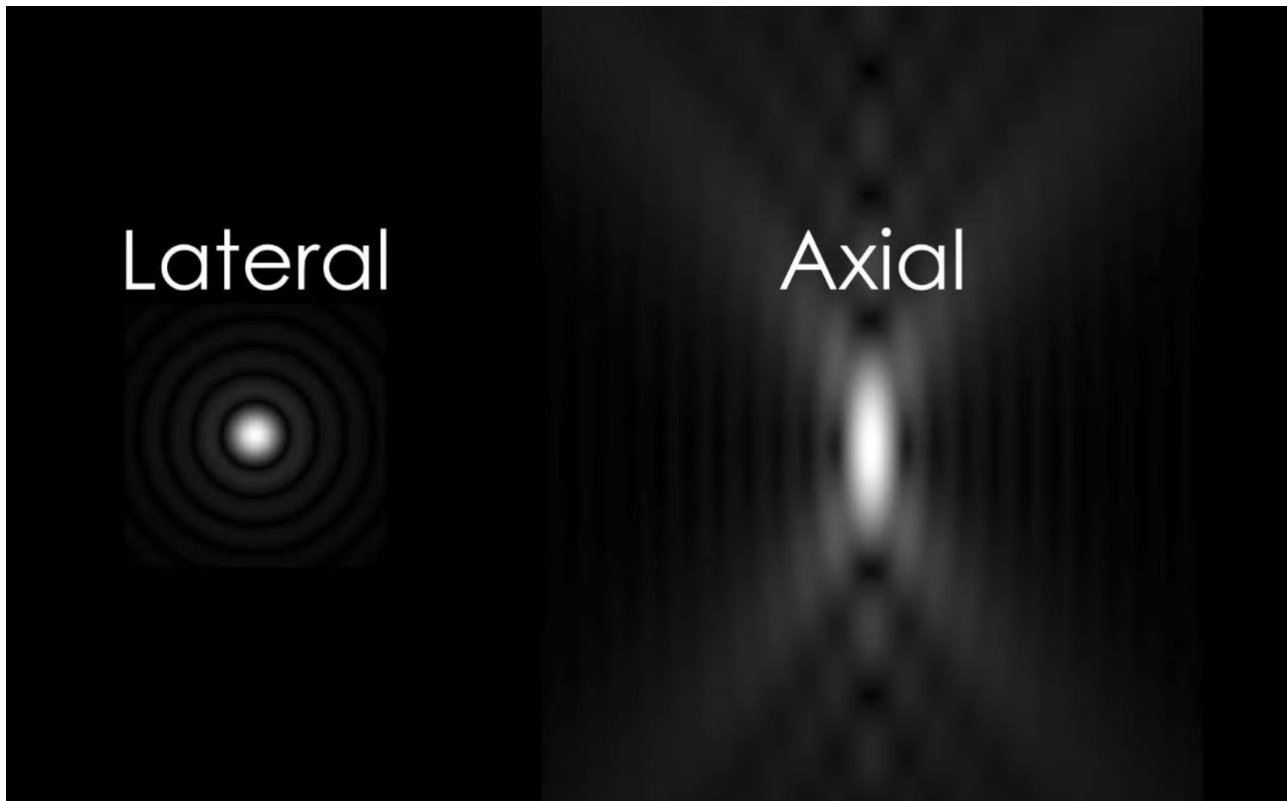
Z twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes h(x, y)\} = F(v_x, v_y) \underbrace{H(v_x, v_y)} = G(v_x, v_y)$$

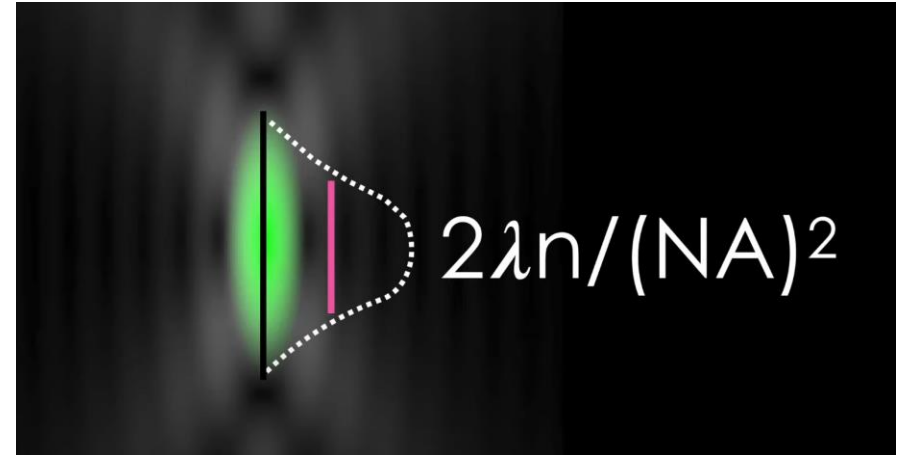
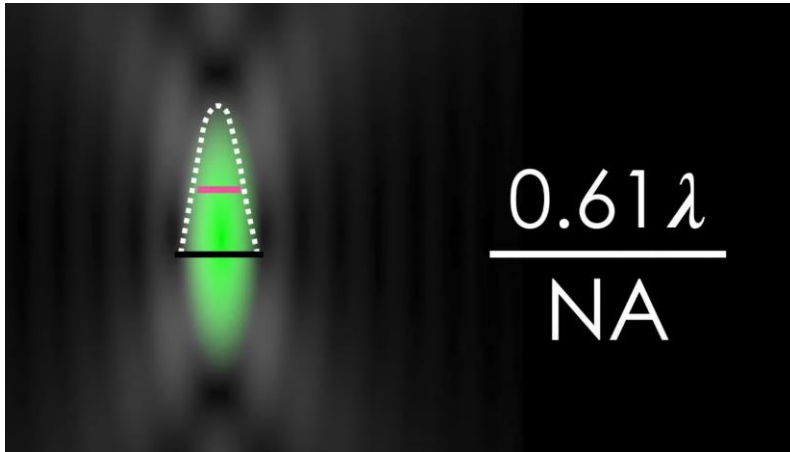
FUNKCJA PRZENOSZENIA UKŁADU

$$H(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$

$H(v_x, v_y)$ jest filtrem częstości przestrzennych



Funkcja przenoszenia



theoretical resolution limits in nanometers
1.4 NA objective lens

Wavelength	Lateral	Axial
350	153	464
400	174	531
450	196	597
500	218	663
550	240	730
600	261	796
650	283	862
700	305	929

https://www.youtube.com/watch?v=Tkc_GOCjx7E

Fala płaska

Z równań Maxwella:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{prawo indukcji Faradaya})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{prawo Ampera})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (\text{prawo Gaussa - elektryczne})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{prawo Gaussa - magnetyczne})$$

i równań materiałowych:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

i korzystając z tożsamości:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} = \Delta$$

dostajemy równanie falowe:

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

W postaci ogólnej:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Fala płaska

Zakładamy, że rozwiązaniem równania falowego:

$$\Delta \mathbf{u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

jest fala monochromatyczna typu:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos[2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]$$

amplituda częstota faza

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \begin{array}{l} \text{prędkość} \\ \text{częstota} \end{array}$$

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z) \frac{\{\exp[-i(2\pi\nu t + \varphi)] + \exp[i(2\pi\nu t + \varphi)]\}}{2}$$

Weźmy falę elektromagnetyczną w postaci:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i2\pi\nu t]$$

Liczę drugi człon równania falowego:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} (2\pi\nu)^2 u = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 u = k^2 u$$

Czyli równanie falowe w postaci:

$$\Delta \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u} = 0$$

równanie Helmholtza

Inne możliwe rozwiązania równania falowego:

fala monochromatyczna o określonym kierunku propagacji

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i(\beta z - \omega t)]$$

fala o określonej częstotliwości

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp[i(\varphi(r) - \omega t)]$$

amplituda

faza

częstość kołowa

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$u(x, y, z, t) = \underbrace{a(x, y, z) \exp(i\varphi(r))}_{\text{amplituda zespolona}} \underbrace{\exp(-i\omega t)}_{\text{zależność od czasu}}$$

amplituda zespolona

zależność od czasu

Fala płaska

Falę monochromatyczną możemy też zapisać jako:

$$u(x, y, z) = A \exp[i(kr + \varphi)]$$

gdzie k jest wektorem falowym:

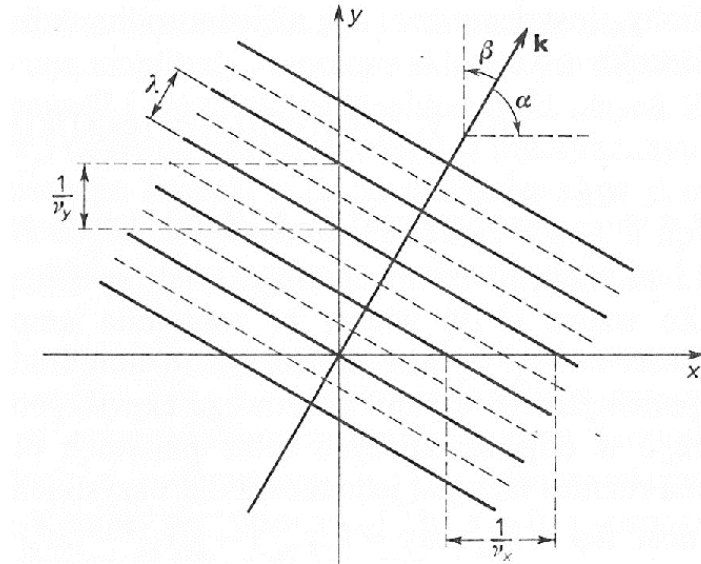
$$k = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}$$

a r jest odległością:

$$r = \vartheta t$$

Definiujemy częstotliwości przestrzenne:

$$\nu_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \quad \nu_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$



Rozkład pola na fale płaskie

Dowolne pole może być przedstawione jako superpozycja (suma) fal monochromatycznych:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_v(x, y, z) \exp[-i2\pi vt]$$

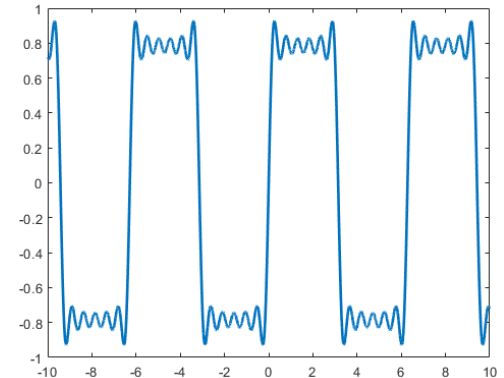
częstości przestrzenne:

$$v_x = \frac{c \cos \alpha}{\lambda} \quad v_y = \frac{c \cos \beta}{\lambda} \quad \lambda = \frac{v}{\nu}$$

$$vt = xv_x = x \frac{c \cos \alpha}{\lambda} = x \frac{c \cos \alpha}{v} \nu \rightarrow x = \frac{vt}{c \cos \alpha}$$

Transformata Fouriera:

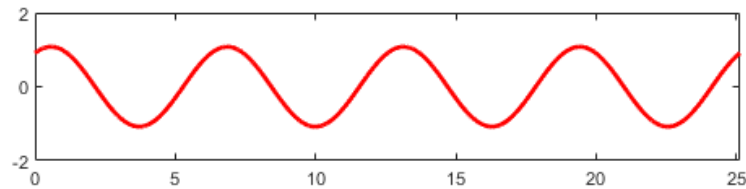
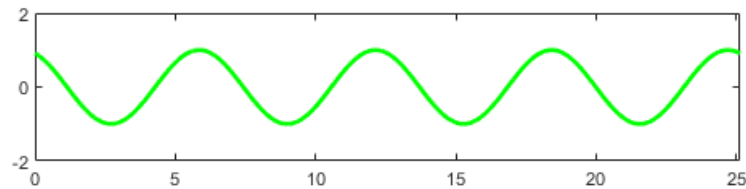
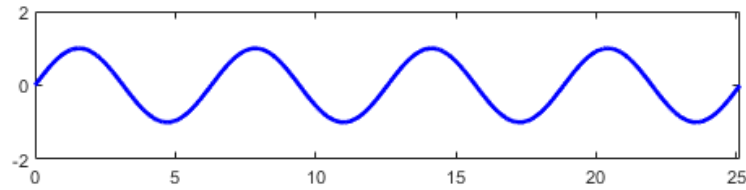
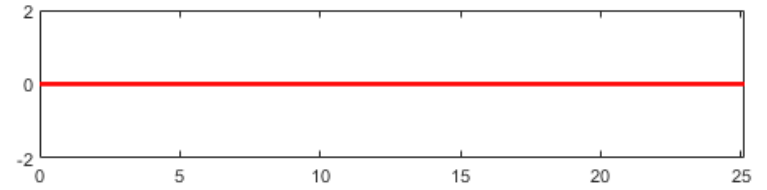
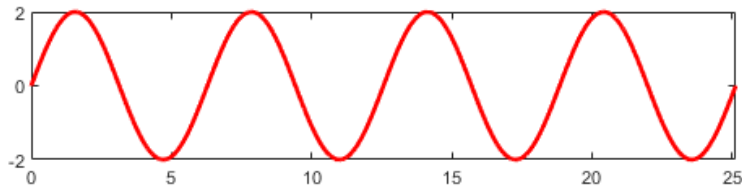
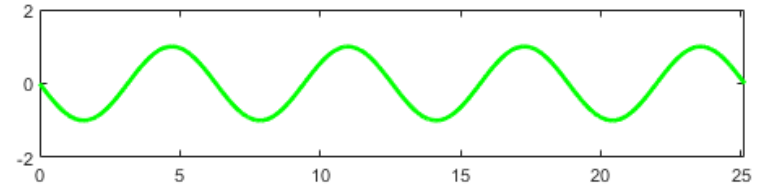
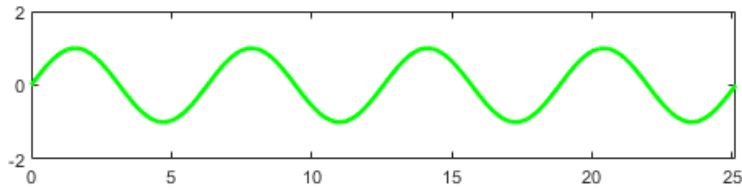
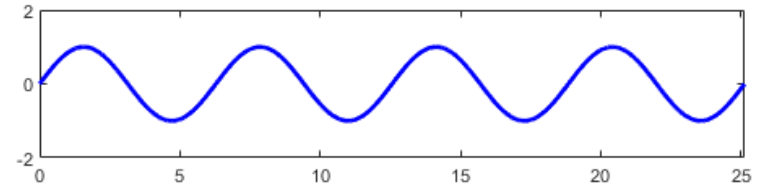
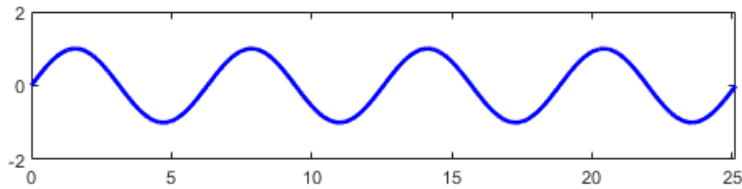
$$F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$



Dowolne pole optyczne rozkładam za pomocą transformaty Fouriera na superpozycję fal monochromatycznych:

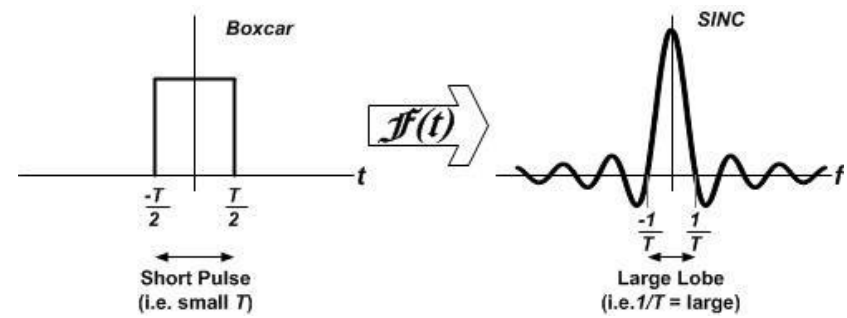
$$u(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(v_x, v_y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dv_x dv_y$$

Superpozycja

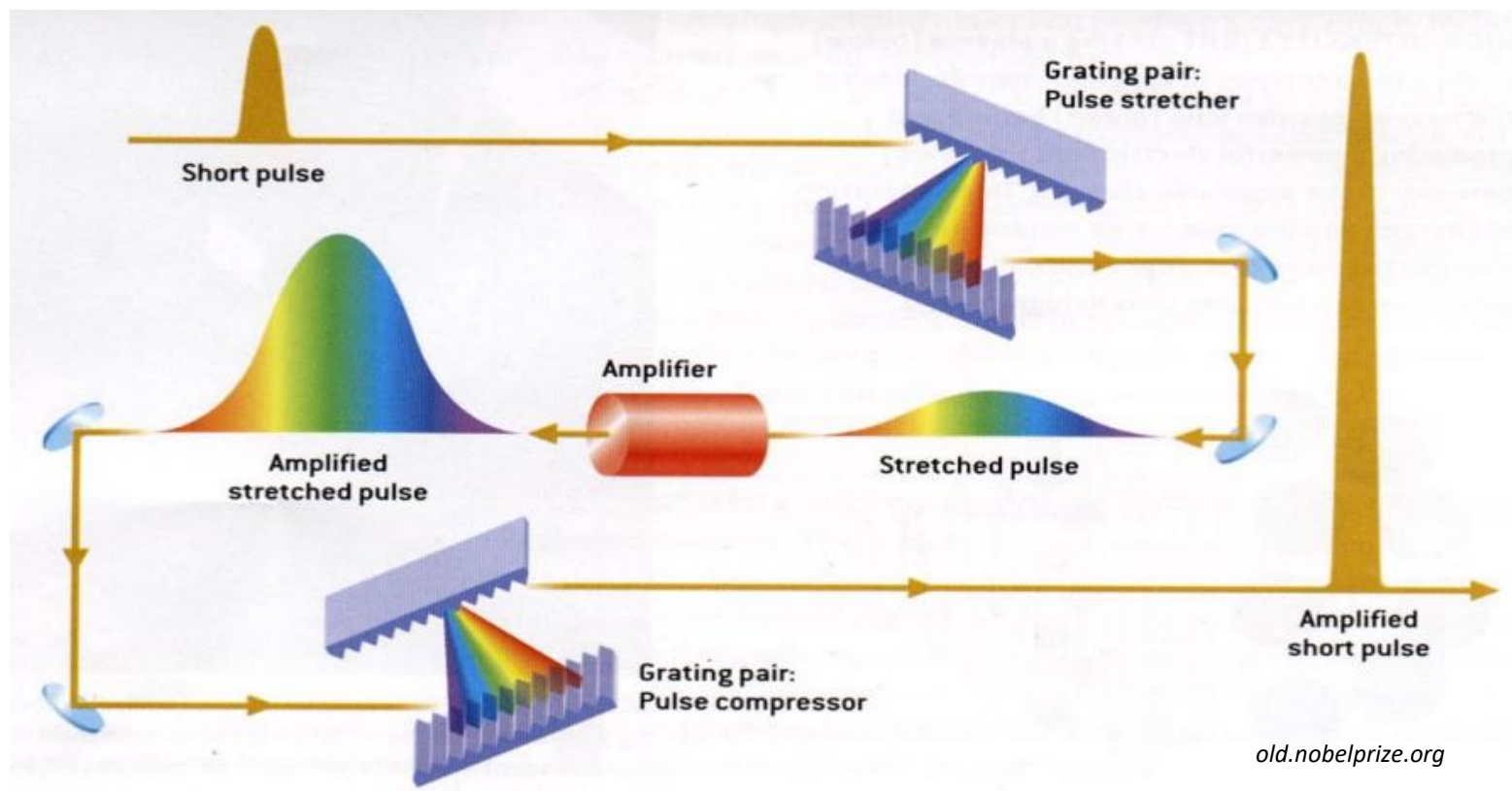


Widmo krótkiego impulsu

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$



e2e.ti.com/blogs_/b/analogwire



old.nobelprize.org

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

Założmy, że znamy rozkład pola na fale monochromatyczne w płaszczyźnie z_0 .
Chcemy znaleźć rozkład pola w płaszczyźnie z_1 .

Rozwiązaniem fala monochromatyczna:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z) \cos[2\pi vt]$$

$$v_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda} \quad v_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

W kierunku propagacji:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2}$$

Aby znaleźć rozwiązanie podstawiam to do równania falowego:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(v_x, v_x, z_1) + k^2 [1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2] U(v_x, v_x, z_1) = 0$$

Uzyskujemy:

$$U(v_x, v_x, z_1) = U_0(v_x, v_x) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2} z_1 \right]$$

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

dla: $v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$ $1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2 \geq 0$ - fala płaska rozprzestrzeniająca się

dla: $v_x^2 + v_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ $1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2 < 0$ - fala zanikająca, evanescentna (niejednorodna)

Funkcja przenoszenia:

$$H(v_x, v_y) = \frac{U(v_x, v_y, z_1)}{U_0(v_x, v_y)} = \begin{cases} \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda v_x)^2 - (\lambda v_y)^2} z_1 \right] & \text{dla: } v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{dla: } v_x^2 + v_y^2 > \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

Propagację fali monochromatycznej w przestrzeni możemy interpretować jako proces filtracji dolnoprzepustowej. Pasmo przenoszenia równoważnego filtra jest ograniczone w płaszczyźnie częstości przestrzennym do koła o promieniu $1/\lambda$. Fale, których częstości są wewnątrz tego koła przenoszone są bez zniekształceń lecz z przesunięciem fazowym.

Częstości z poza koła są tłumione i w odległości kilku λ nie są rejestrowane.

Prędkość fazowa, prędkość grupowa

Założmy, że mamy 2 fale monochromatyczne:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

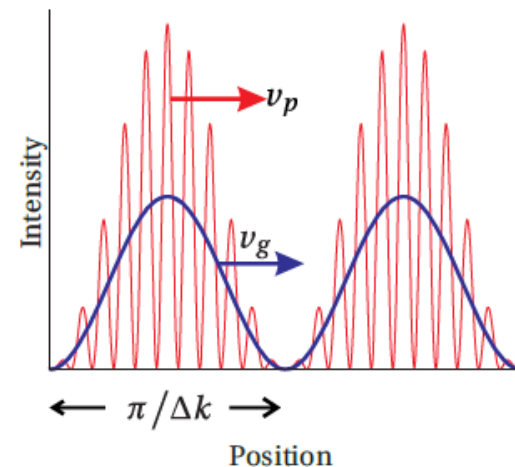
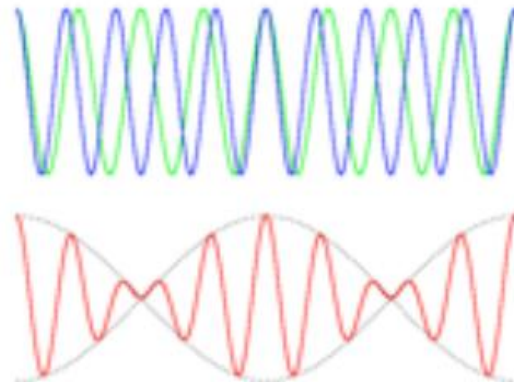
Prędkość fazowa – prędkość poruszania się punktów o tej samej fazie (fala monochromatyczna):

$$v_{p1} = \omega_1 / k_1 \quad v_{p2} = \omega_2 / k_2 \quad n = \frac{c}{v_p}$$

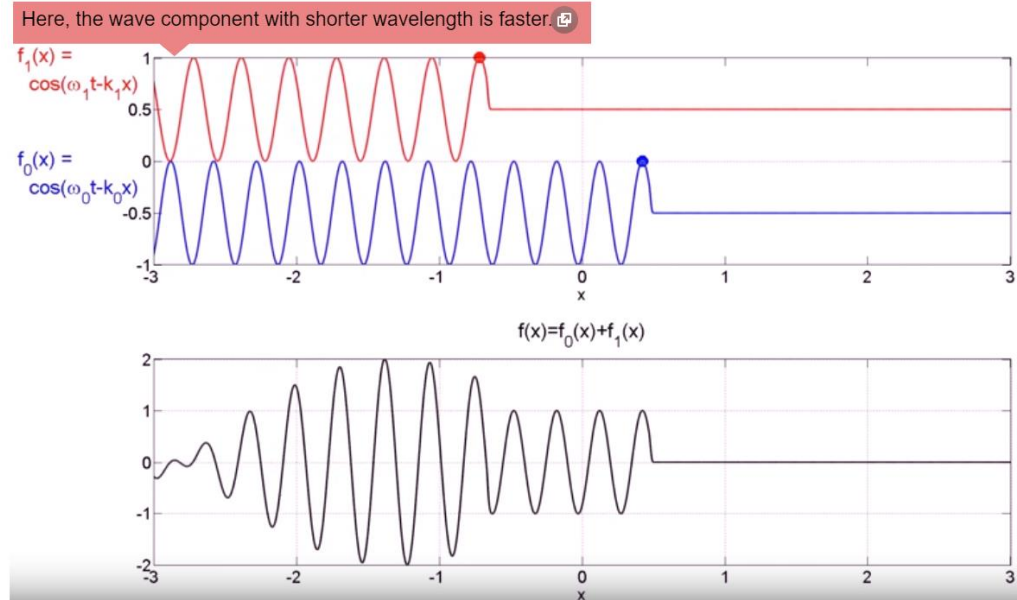
Prędkość grupowa – dla fal niemonochromatycznych, prędkość rozchodzenia się informacji, Rozchodzenia się obwiedni:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$



Prędkość fazowa, prędkość grupowa

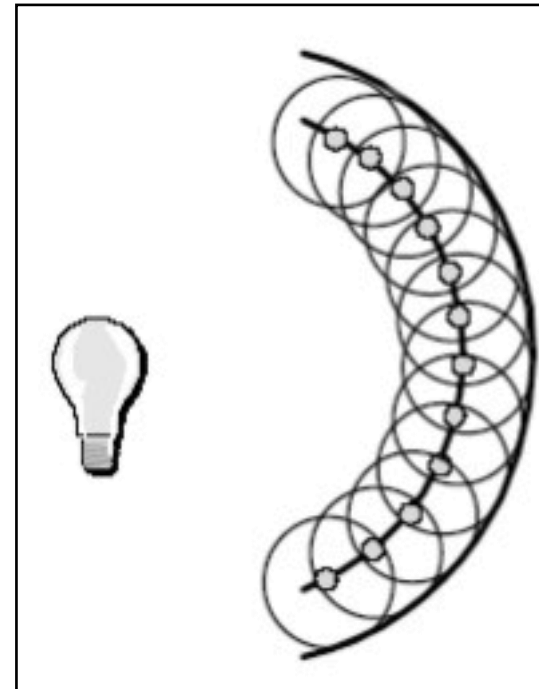
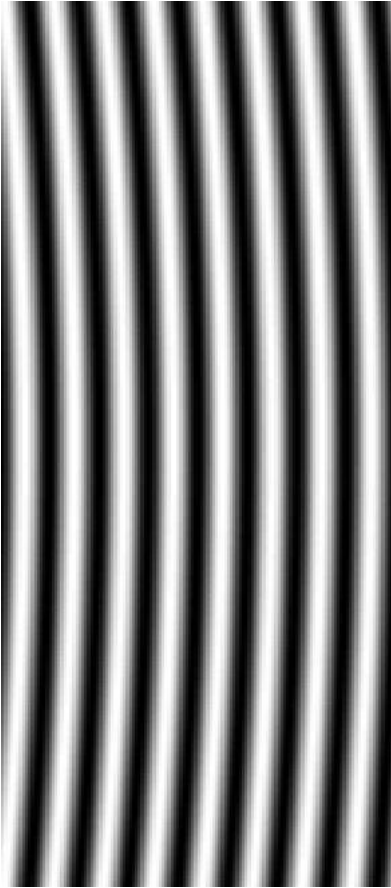


<https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8ISkfM>

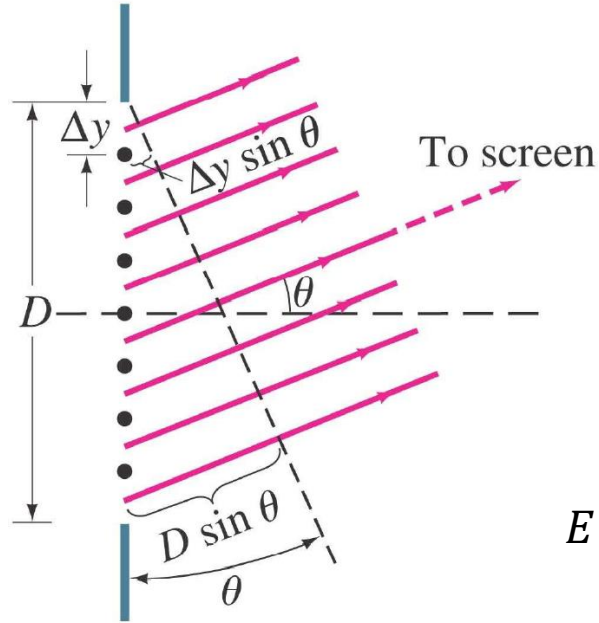
www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_3359660903&feature=iv&src_vid=ePJdV75fT5o&v=tIM9vq-bepA

Interferencja – pojedyncza szczelina

Propagację fali elektromagnetycznej za przeszkodą możemy sobie wyobrazić za Huygensem jako falę pochodzącą ze zbioru punktowych źródeł światła umieszczonych w płaszczyźnie przesłony.



Interferencja – pojedyncza szczelina



- Wszystkie oscylatory w fazie (fala płaska)
- Równe amplitudy w punkcie obserwacji (daleko ekran)

Interferencja N fal

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_2 - \omega t)} + \dots + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_N - \omega t)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_N - r_1)}]$$

$$\beta = k D \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta$$

$$\Delta\beta = k \Delta y \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

$$\Delta\beta = k(r_2 - r_1), 2\Delta\beta = k(r_3 - r_1), \dots, N\Delta\beta = k(r_N - r_1)$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \underbrace{[1 + (e^{i\Delta\beta}) + (e^{i2\Delta\beta}) + \dots + (e^{iN\Delta\beta})]}_{\text{szereg geometryczny}}$$

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1}$$

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1} = \frac{e^{iN\Delta\beta/2} [e^{iN\Delta\beta/2} - e^{-iN\Delta\beta/2}]}{e^{i\Delta\beta/2} [e^{i\Delta\beta/2} - e^{-i\Delta\beta/2}]} = e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{\sin^2(\Delta\beta/2)}$$

Interferencja

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1} = \frac{e^{iN\Delta\beta/2} [e^{iN\Delta\beta/2} - e^{-iN\Delta\beta/2}]}{e^{i\Delta\beta/2} [e^{i\Delta\beta/2} - e^{-i\Delta\beta/2}]} = e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} e^{i(N-1)\Delta\beta/2} \frac{\sin(N\Delta\beta/2)}{\sin(\Delta\beta/2)}$$

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{\sin^2(\Delta\beta/2)}$$

Interferencja

$$N \rightarrow \infty, \quad \Delta y \rightarrow 0$$

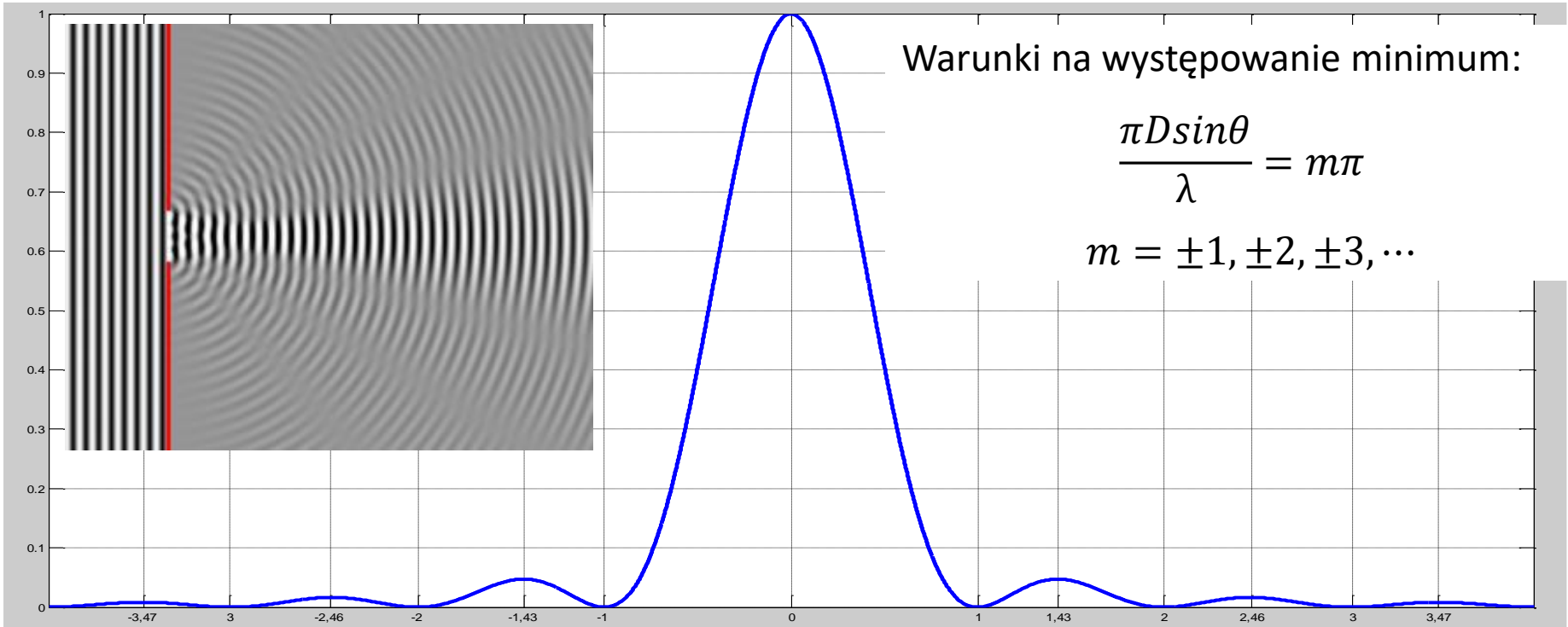
$$\Delta\beta \sim \Delta y \Rightarrow \sin^2(\Delta\beta/2) \approx \Delta\beta/2$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\beta/2)}{(N\Delta\beta/2)^2} = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

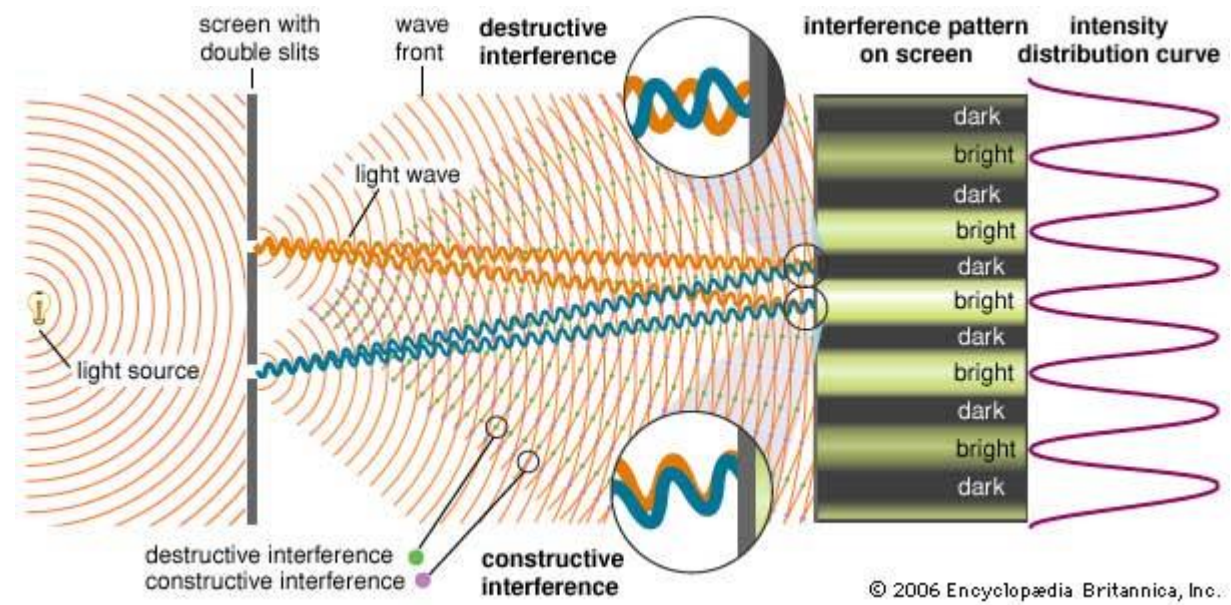
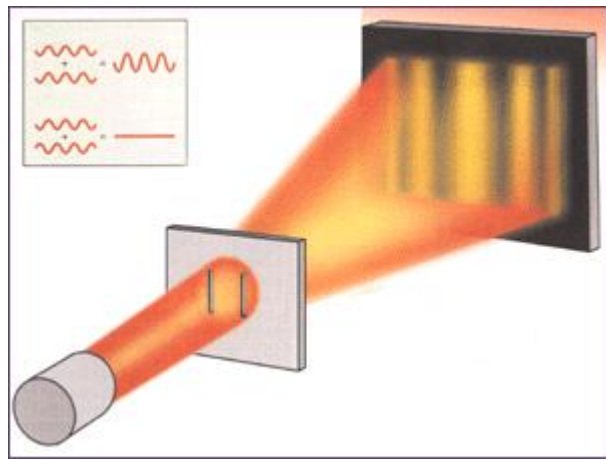
Dyfrakcja

Interferencja – pojedyncza szczelina

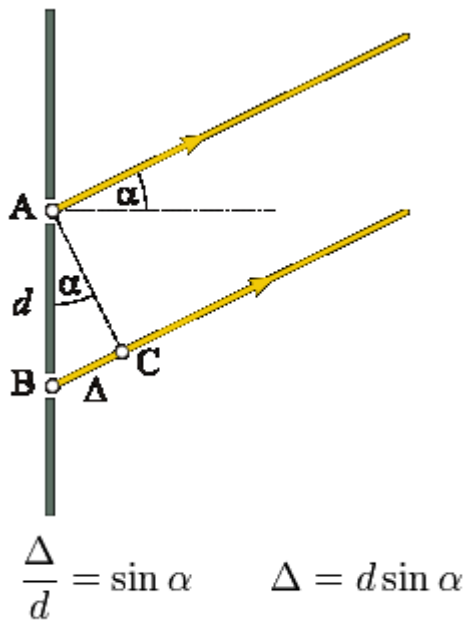
$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)



© 2006 Encyclopædia Britannica, Inc.



maksimum: $d \sin \alpha_k = k\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{d}{\lambda}, \frac{d}{\lambda}\right)$

minimum: $d \sin \alpha_k = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{2d-\lambda}{2\lambda}, \frac{2d-\lambda}{2\lambda}\right)$

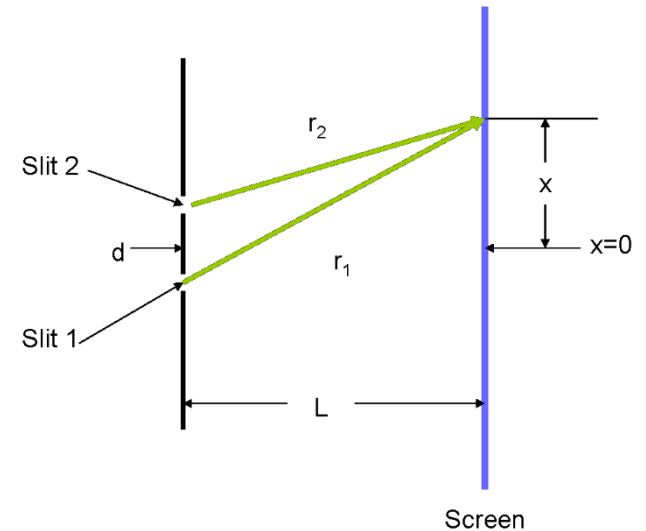
Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

$$\begin{array}{l} E_1 = Ae^{i(kr_1 - \omega t)} \\ E_2 = Ae^{i(kr_2 - \omega t)} \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{Interferencja}} \longrightarrow E = E_1 + E_2$$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = Ae^{i(kr_1 - \omega t)} + Ae^{i(kr_2 - \omega t)} = Ae^{i(kr_1 - \omega t)}(1 + e^{ik\Delta r}) = \\ &= Ae^{i(kr_1 - \omega t)}e^{ik\Delta r/2}(e^{ik\Delta r/2} + e^{-ik\Delta r/2}) = Ae^{i(kr_1 - \omega t)}e^{ik\Delta r/2}2\cos(k\Delta r/2) \end{aligned}$$

gdzie: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = d\sin\theta$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

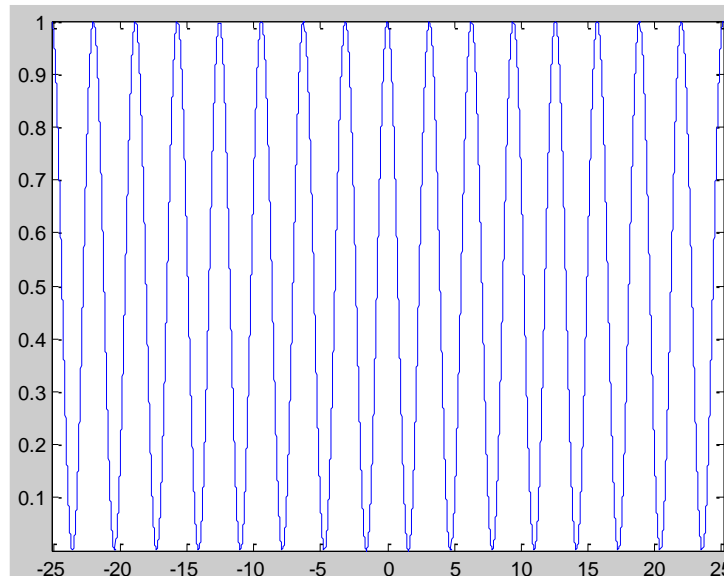
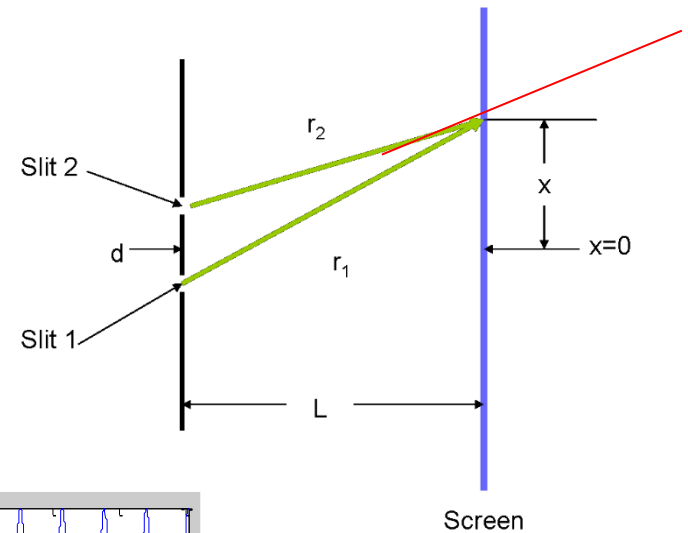
Odległość od punktu środkowego między szczelinami do danego punktu na ekranie:

$$r = r_1 + \Delta r/2$$

$$E(r, \theta) = Ae^{i(kr - \omega t)} 2\cos(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

↑
natężenie jednej z fal



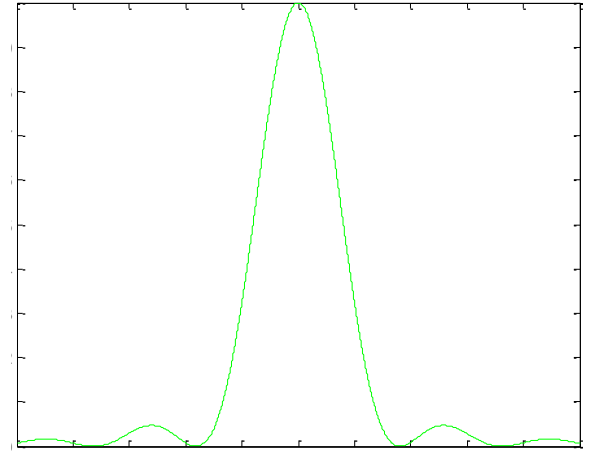
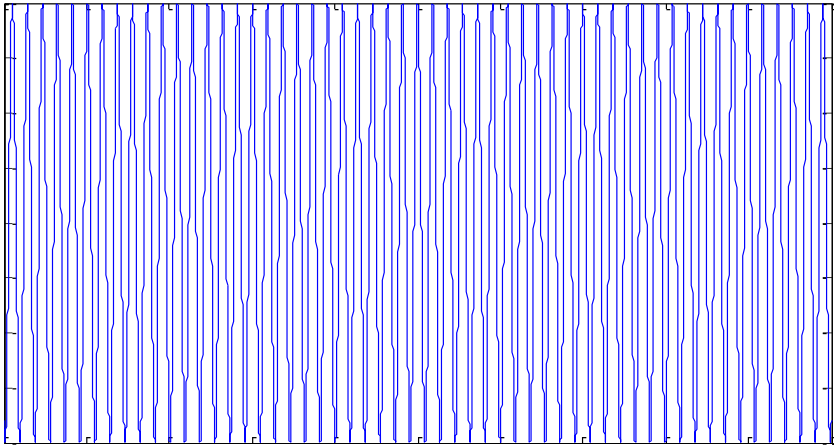
Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

Trzeba jeszcze uwzględnić dyfrakcje na pojedynczej szczelinie:

$I = \text{Interferencja} \cdot \text{dyfrakcja}$

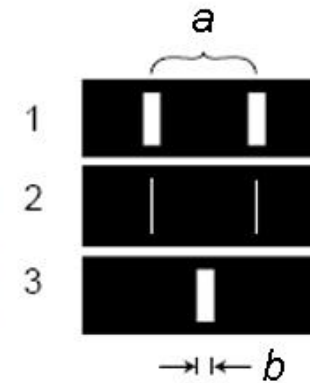
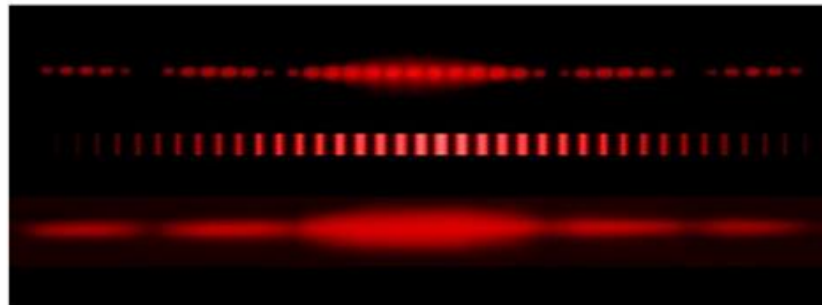
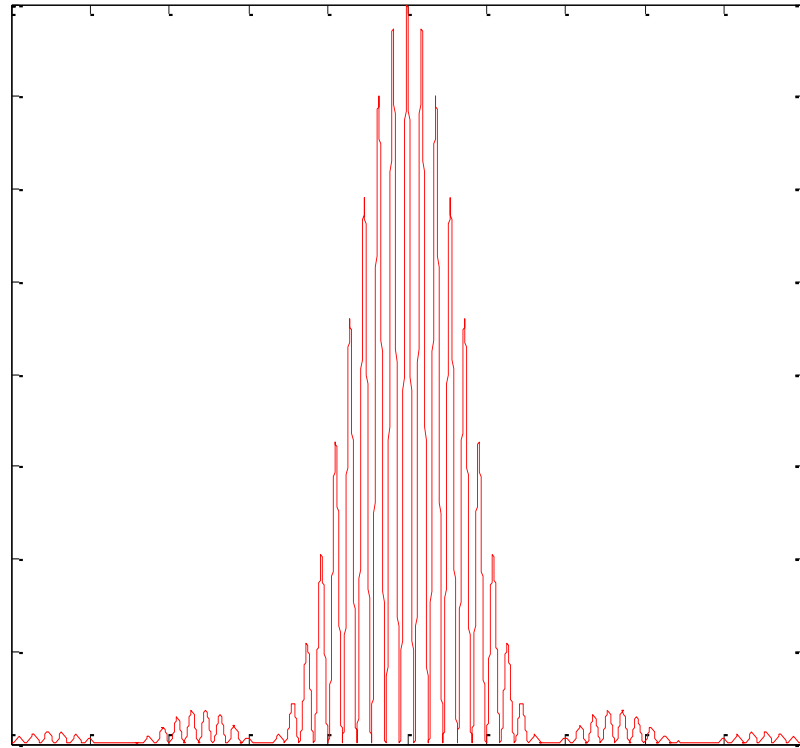
$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda)$$

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

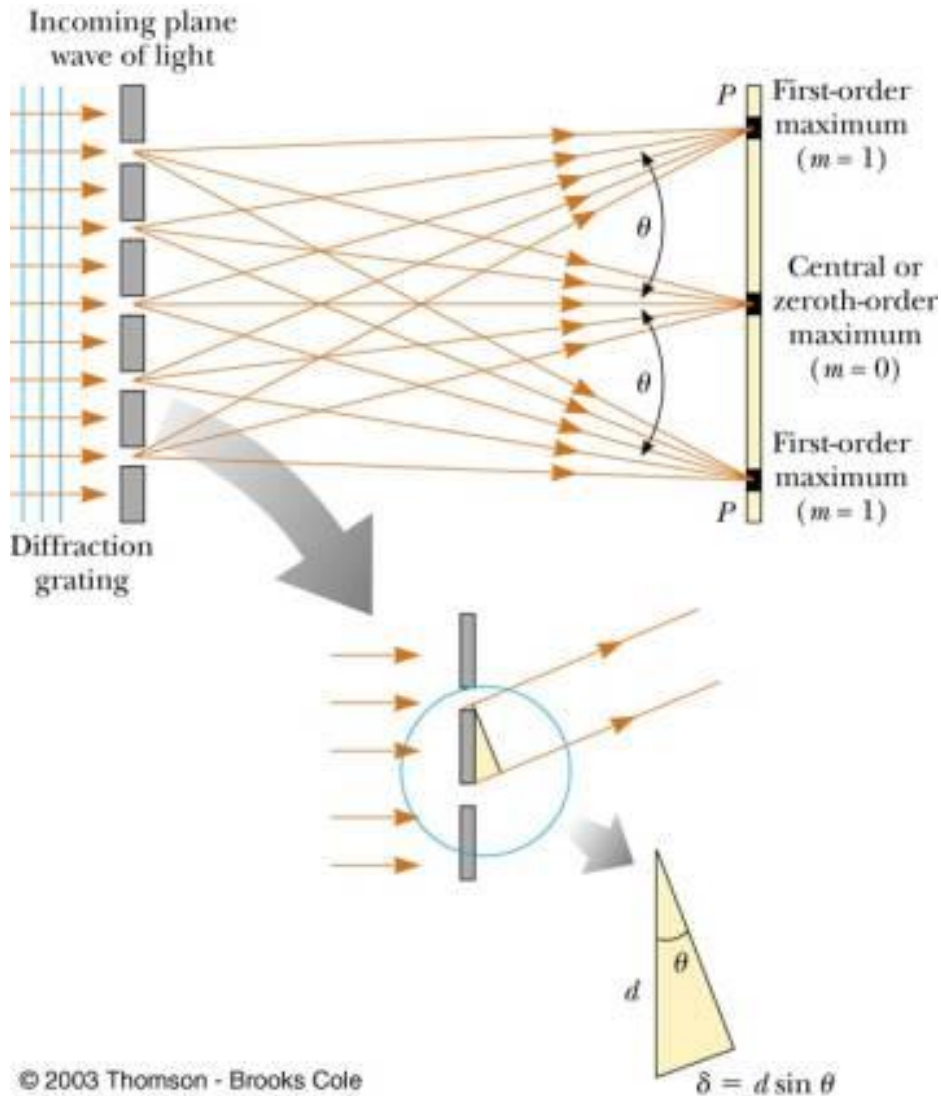


$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2(\pi d \sin\theta / \lambda) \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)



Interferencja – siatka dyfrakcyjna



© 2003 Thomson - Brooks Cole

Wzór siatki dyfrakcyjnej:

$$d \sin(\theta_k) = k \lambda$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

d – stała siatki

k – rząd ugięcia, numer wzmocnienia

Ponieważ zachodzi:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_k < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \theta_k < 1$$

czyli:

$$\frac{k \lambda}{d} < 1 \Rightarrow k_{\max} = \left[\frac{d}{\theta} \right]$$

Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Jak policzyć natężenie na ekranie.

Podobnie jak dla 2 szczelin:

$$I = \underbrace{\text{INTERFERENCJA}} \cdot \underbrace{\text{DYFRAKCJA}}$$

na N szczelinach (punktowych)

na pojedynczej szczelinie

$$\frac{I_0 \sin^2(N\Delta\beta/2)}{N^2 \sin^2(\Delta\beta/2)}$$

Było liczone dla
pojedynczej szczeliny

$$I_0 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2$$

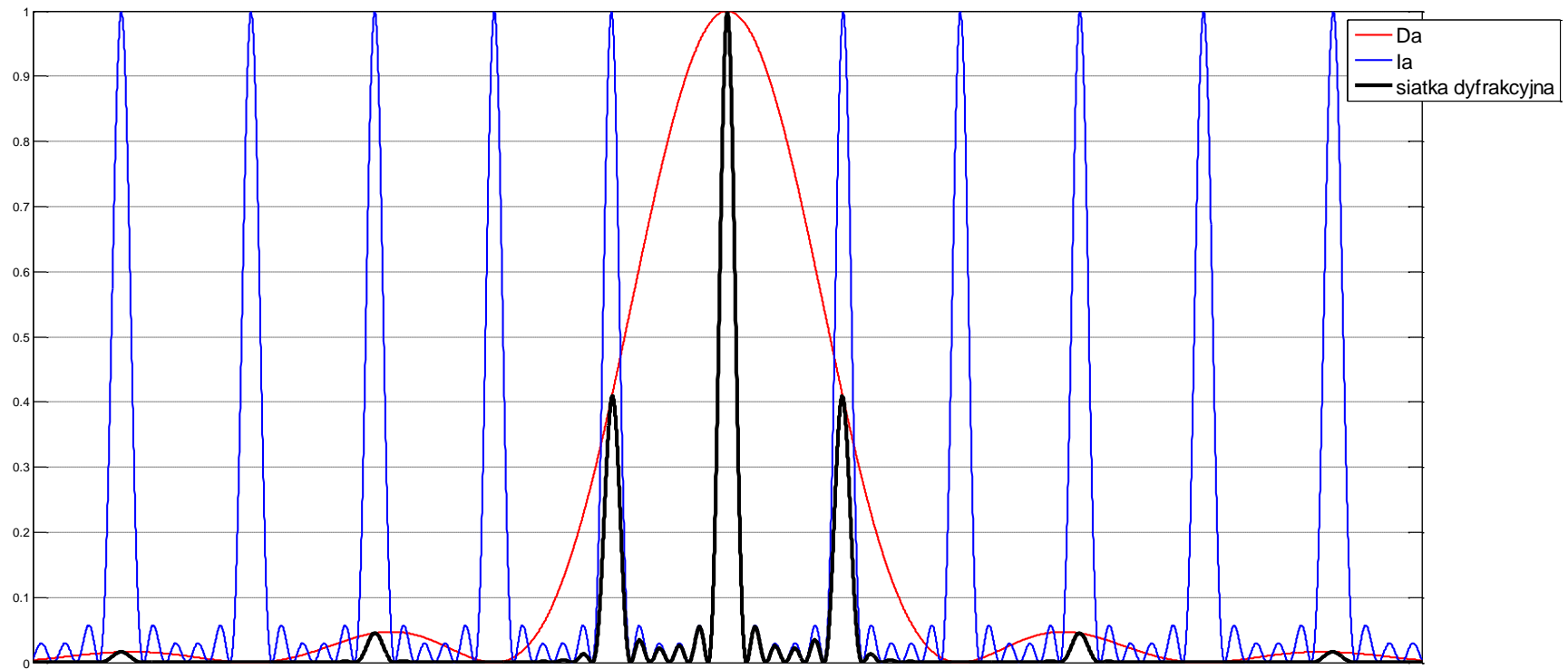
$$I(\theta) = \left[\frac{\sin(\pi ND \sin\theta / \lambda)}{N \sin(\pi D \sin\theta / \lambda)} \right]^2 \left[\frac{\sin(\pi d \sin\theta / \lambda)}{\pi d \sin\theta / \lambda} \right]^2$$

gui2_3.m - $A \cdot \sin(Bx+C)+D$
PropagujacaWiazka.m
DwaZrodla.m
Szczelina.m
Cw7_1_2punkty.m
Cw6_3.m – siatki dyfr
Cw6_2.m – siatka o różnych szczelinach

Interferencja – siatka dyfrakcyjna

- gui2_3.m - $A \cdot \sin(Bx+C)+D$
- PropagujacaWiazka.m
- DwaZrodla.m
- Szczelina.m
- Cw7_1_2punkty.m
- Cw6_3.m – siatki dyfr
- Cw6_2.m – siatka o różnych szczelinach

Interferencja – siatka dyfrakcyjna



Interferencja – siatka dyfrakcyjna

