

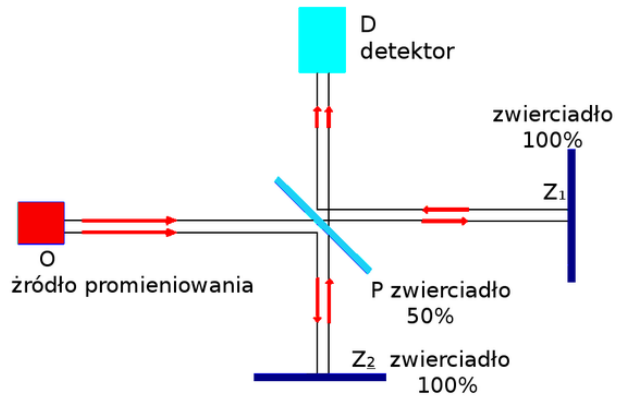
1100-4BW12, rok akademicki 2018/19

# WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

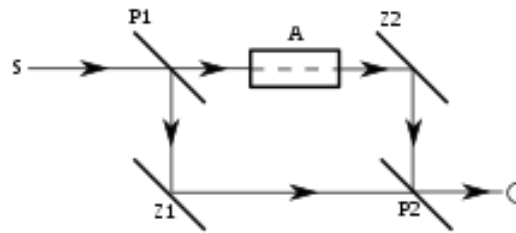
# Interferometry

## Michelsona

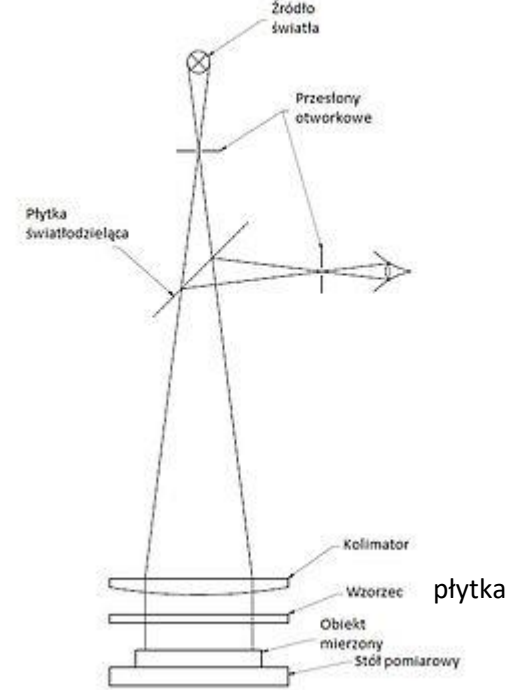


[ilf.fizyka.pw.edu.pl/instrukcje/michelson/](http://ilf.fizyka.pw.edu.pl/instrukcje/michelson/)

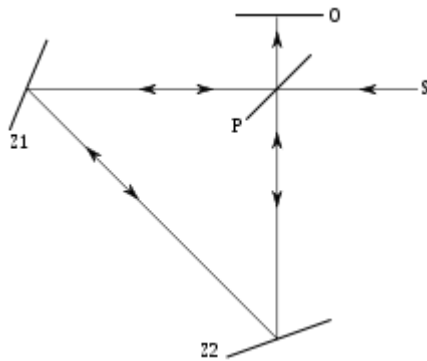
## Macha-Zehndera



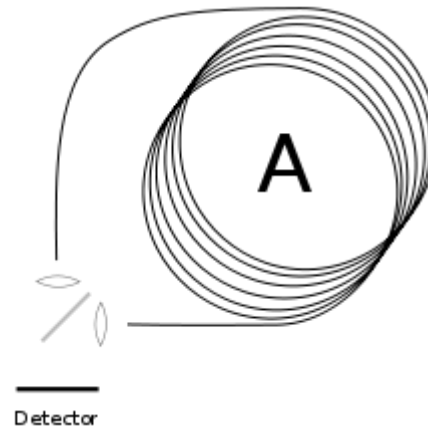
## Fizeau



## Sagnaca



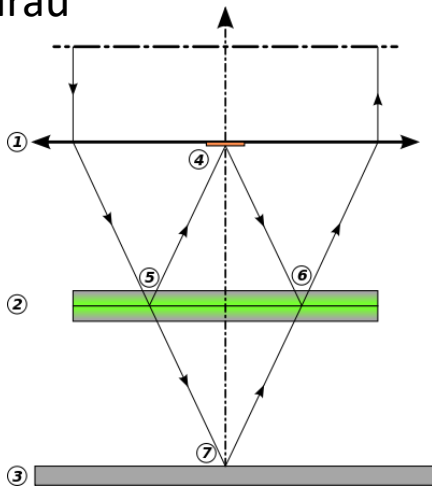
Light source



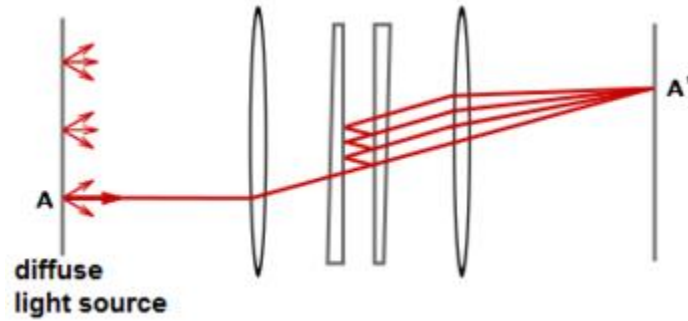
Detector

# Interferometry

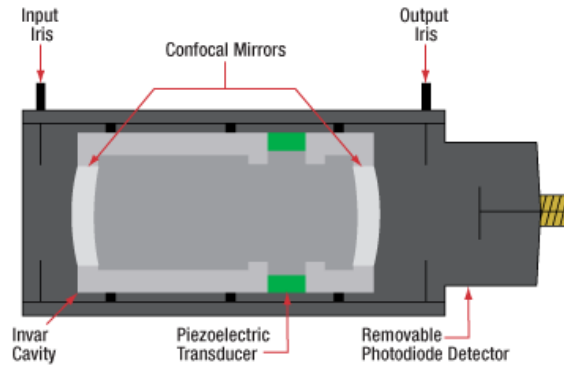
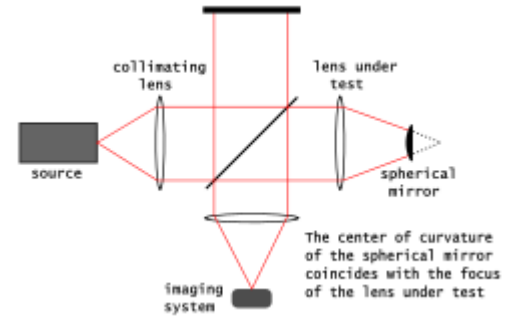
## Mirau



## Fabry-Perot

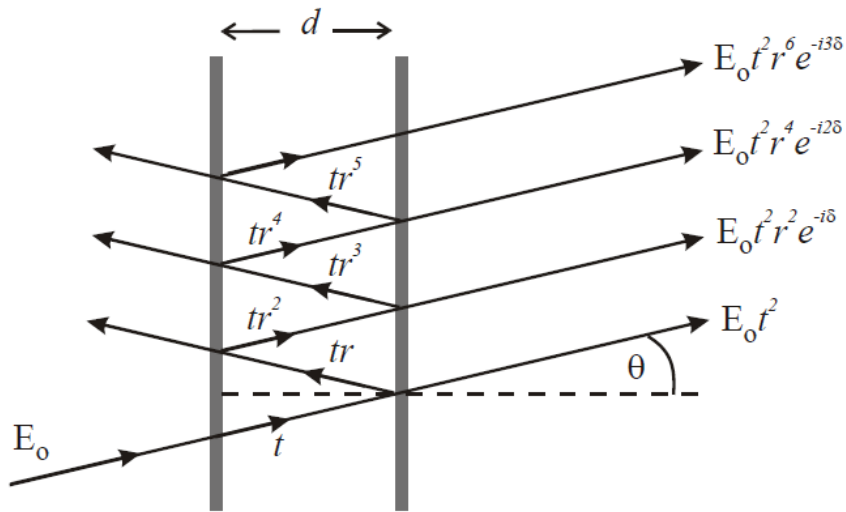


## Twyman-Greena



[www.thorlabs.com](http://www.thorlabs.com)

# Interferometr Fabry-Perot



Różnica faz: 
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \theta$$

$$E_t = E_0 t_1 t_2 e^{-i\omega t} + E_0 t_1 t_2 r_1 r_2 e^{-i(\omega t - \delta)} + E_0 t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{-i(\omega t - 2\delta)} + \dots etc.$$

$$E_t = E_0 t_1 t_2 e^{i\omega t} \left[ \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} \right]$$

$$I_t = E_t E_t^* = E_0^2 t_1^2 t_2^2 \left[ \frac{1}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \delta} \right]$$

# Interferometr Fabry-Perot

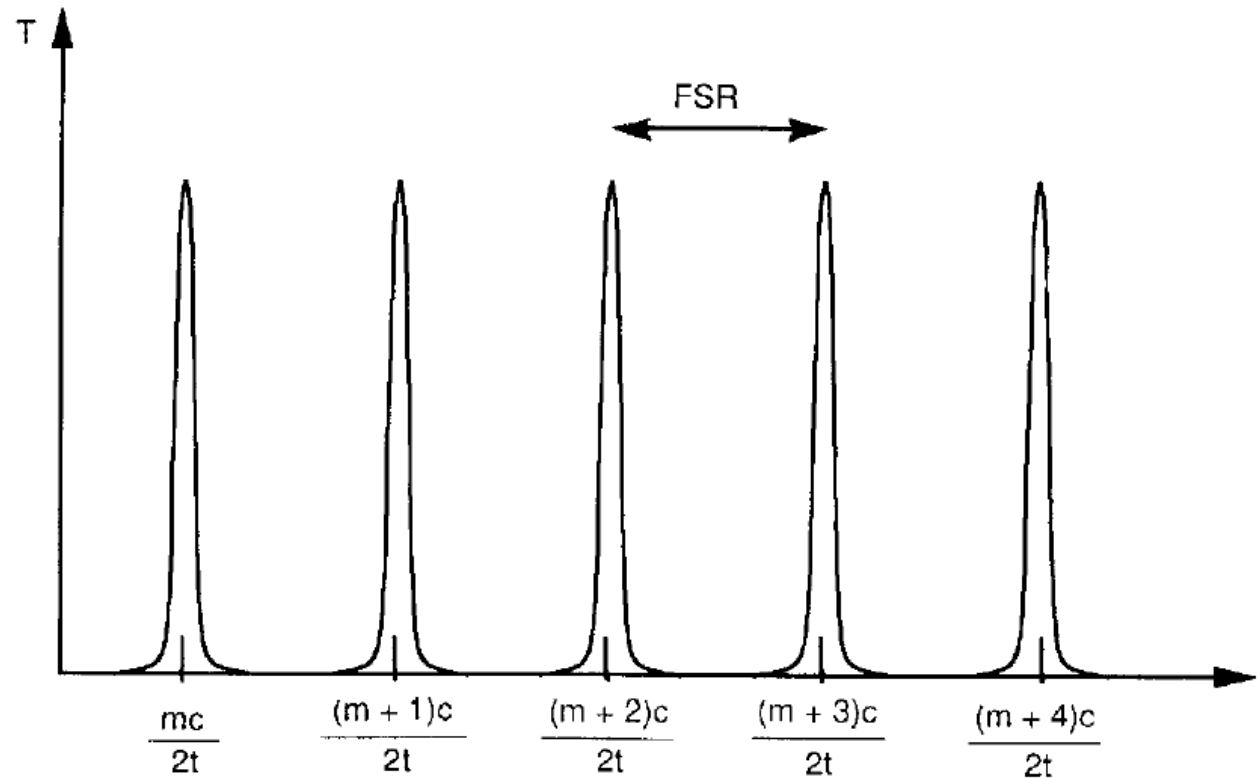
$$E_0^2 = I_0, \quad r_1 r_2 = R \quad \text{and} \quad t_1 t_2 = T, \quad \text{and} \quad \cos \delta = (1 - 2 \sin^2 \delta/2)$$

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \delta/2} \right]$$

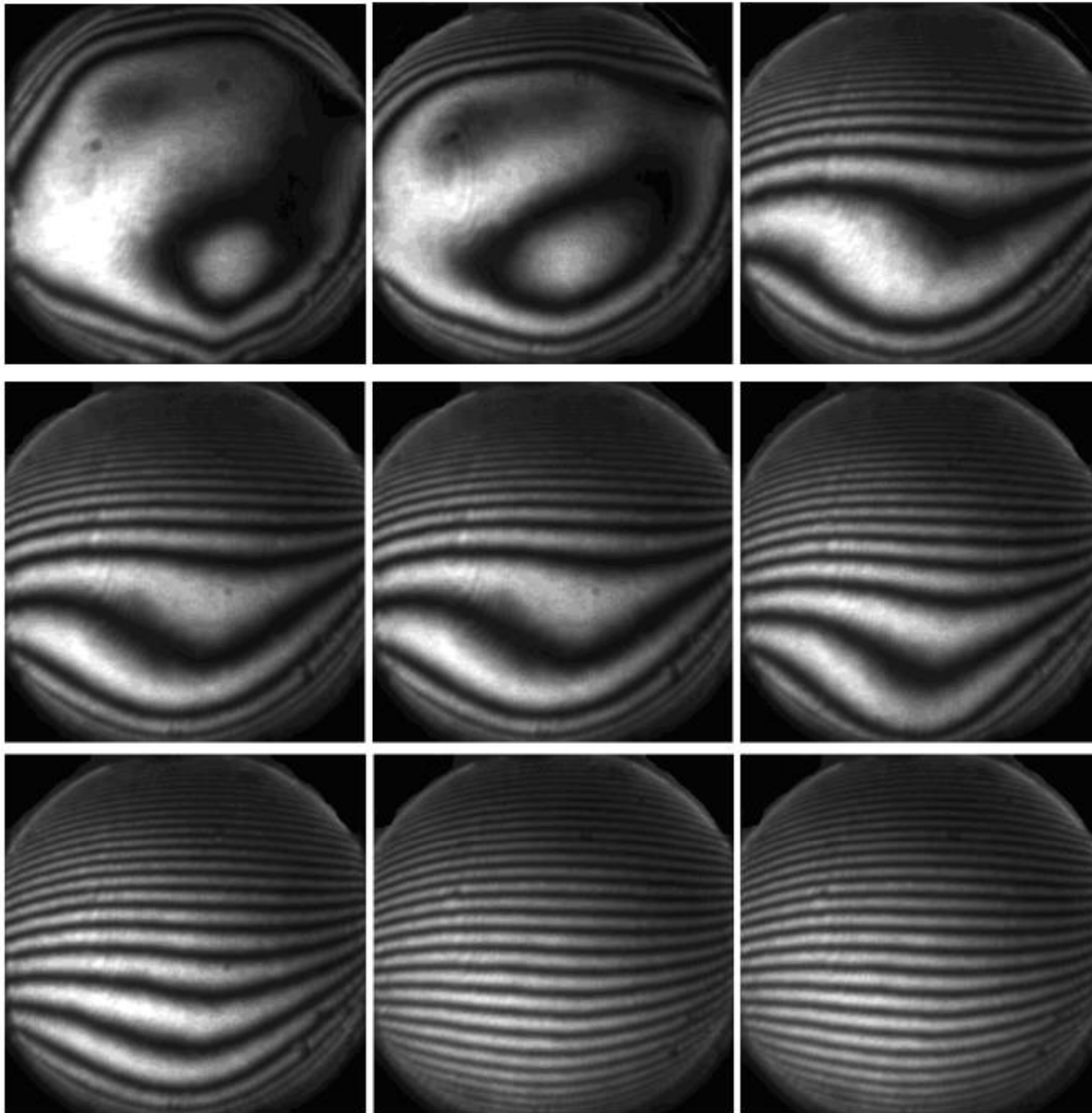
$$T = (1 - R)$$

$$\frac{4R}{(1-R)^2} = \Phi$$

$$I_t = I_0 \left[ \frac{1}{1 + \Phi \sin^2 \delta/2} \right]$$



# Analiza interferogramu

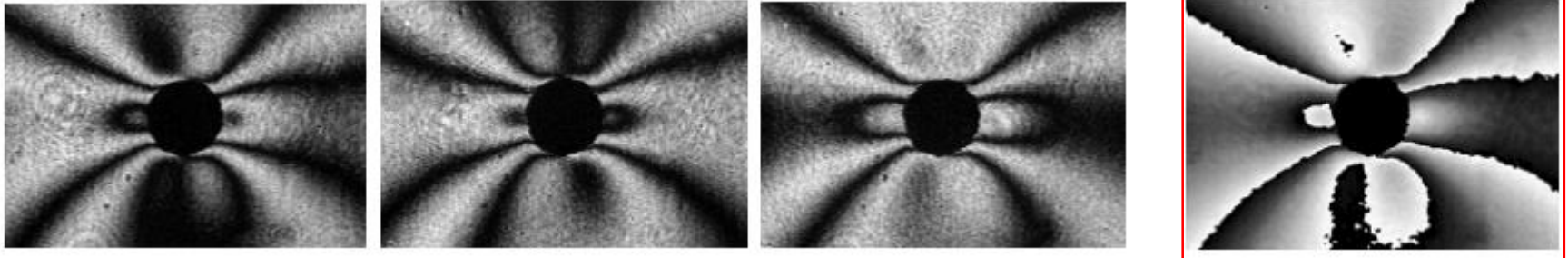


# Analiza interferogramu

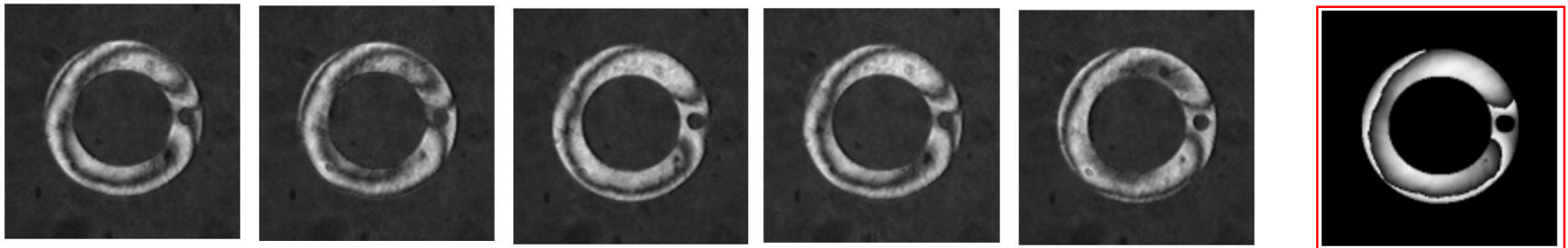
- Przesunięcie fazy

$$\alpha_i = \frac{i2\pi}{N} \quad \text{gdzie } i = 1, \dots, N$$

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ [rad]} \quad \bar{\Phi} = \arctg \left[ \sqrt{3} \frac{I_1 - I_3}{2I_2 - I_1 - I_3} \right] \quad \text{gdy} \quad \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$$



$$\bar{\Phi} = \arctan \left[ \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_1 - I_5} \right], \quad \text{gdy} \quad \alpha_1 = -\pi; \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_3 = 0; \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_5 = \pi$$

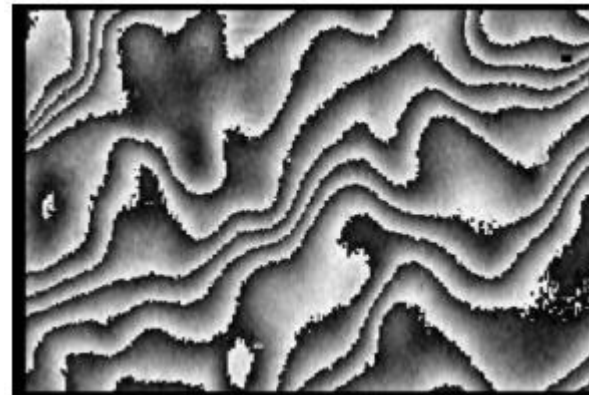
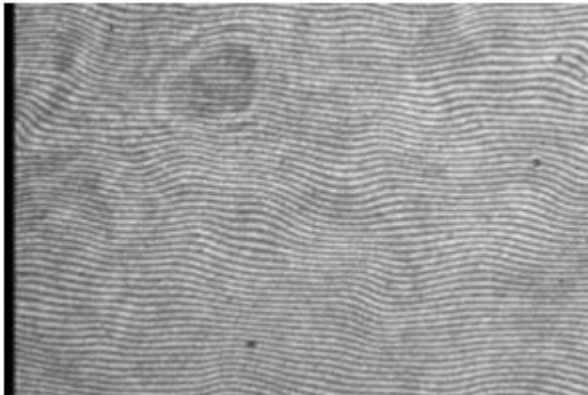


# Analiza interferogramu

- Dodanie częstości nośnej  $f_0 = \frac{M}{4}$  gdzie M jest rozdzielczością matrycy detektora

$$\phi(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \left[ \frac{\sqrt{4[I(x-1, y) - I(x+1, y)]^2 - [I(x-2, y) - I(x+2, y)]^2}}{2I(x, y) - I(x-2, y) - I(x+2, y)} \right]$$

gdzie  $I(x+i, y)$  jest natężeniem światła w pikselach  $i=-2, -1, 0, +1, +2$





# Spektroskopia Fourierowska

W klasycznej spektroskopii – siatka dyfrakcyjna

- Detektor – linijka
- Pojedynczy detektor
  - skanowanie po  $\lambda$
  - Interferencja + analiza Fourierowska

## FTIR (Fourier Transform Infrared Spectroscopy)

Interferencja fal o różnych częstotliwościach jest inna, bowiem dla tej samej drogi  $x$ , różnica faz jest inna, czyli w  $I(x)$  dla różnych długości fal zawarta jest informacja o WIDMIE.

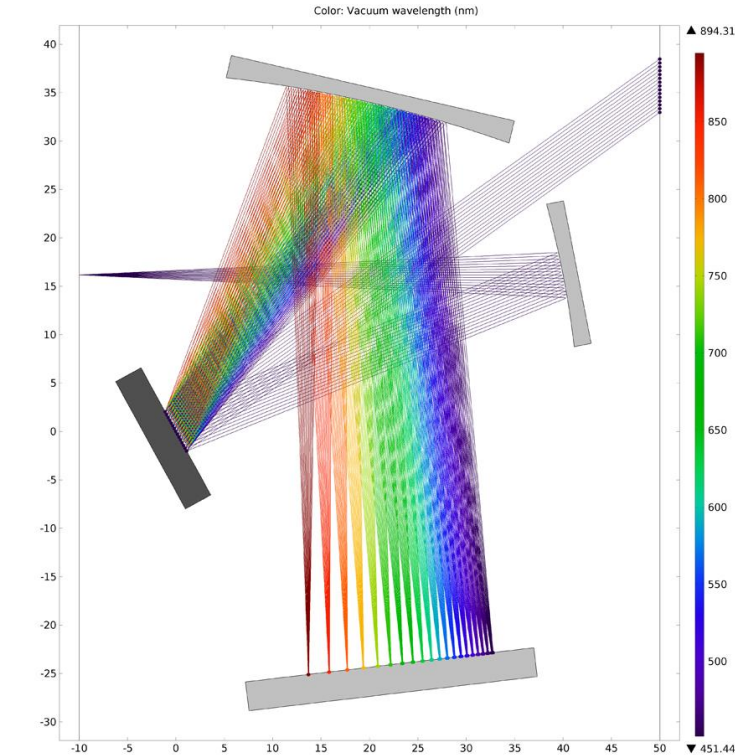
$$I(x) = \int_0^{\infty} 2I(\tilde{\nu})R(\tilde{\nu})T(\tilde{\nu})(1 + \cos 2\pi\tilde{\nu}x) d\tilde{\nu}$$

$$F(x) = I(x) - I(\infty) = \int_0^{\infty} 2I(\tilde{\nu})R(\tilde{\nu})T(\tilde{\nu})\cos 2\pi\tilde{\nu}x d\tilde{\nu}$$

sygnał interferencyjny

sygnał przy Braku interferencji

$$A(\tilde{\nu}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos 2\pi\tilde{\nu}x dx \quad \text{Transformata Fouriera}$$



[www.comsol.de/ray-optics-module](http://www.comsol.de/ray-optics-module)

$$T(\tilde{\nu}) = \frac{A_{pr}(\tilde{\nu})}{A_0(\tilde{\nu})} \quad \text{Widmo transmisyjne}$$

$A_{pr}$  – FT interferogramów z próbką

$A_0$  – FT bez próbki

Punktem wyjścia jest równanie Helmholtza:  $[\Delta + k^2]U(\mathbf{x}) = 0$

Rozwiązanie równania falowego w postaci fal monochromatycznych

gdzie  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$  jest wektorem falowym.

Właściwości danego pola  $U$  zależą wyłącznie od położenia i czasu:  $U(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$

Obliczenie własności zespolonego pola  $U(\mathbf{x})$  w dowolnym punkcie przestrzeni  $\mathbf{x}$  możliwe jest przy wykorzystaniu funkcji Greena:

$$U(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S [\nabla U(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \nabla G(\mathbf{x})] dS$$

Jest to podstawowe równanie skalarnej teorii dyfrakcji (równanie Helmholtza-Kirchhoffa).

Pozwala ono na sprowadzenie problemu dyfrakcji do rozważania **pól rozchodzących się bez przeszkód** oraz **pól pochodzących od przeszkód**, które stają się źródłem fal sferycznych.

Całkowanie odbywa się po powierzchni zamkniętej  $S$ , która otacza dany punkt.

Mamy dwie funkcje ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne U i G:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (U\nabla G) &= U\nabla \cdot \nabla G + (\nabla U) \cdot (\nabla G) \\ - \nabla \cdot (G\nabla U) &= G\nabla \cdot \nabla U + (\nabla G) \cdot (\nabla U) \\ \hline \nabla \cdot (U\nabla G - G\nabla U) &= U\nabla^2 G - G\nabla^2 U \end{aligned}$$

Twierdzenie Gaussa:

$$\int_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{U}}_{\substack{\text{net outflow} \\ \text{of flux per} \\ \text{unit volume}}} dV = \int_S \underbrace{\mathbf{U} \cdot d\mathbf{s}}_{\substack{\text{total outflow of flux} \\ \text{from the surface } S}}$$

Liczymy teraz całkę po objętości, w której określone są te funkcje:

„Przepływ” w objętości V  $\iiint_V \nabla \cdot (U\nabla G - G\nabla U) dV = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dV$

Lewą stronę z teorii Gaussa można zastąpić całką po powierzchni:

$$\oiint_S (U\nabla G - G\nabla U) dS = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dV$$

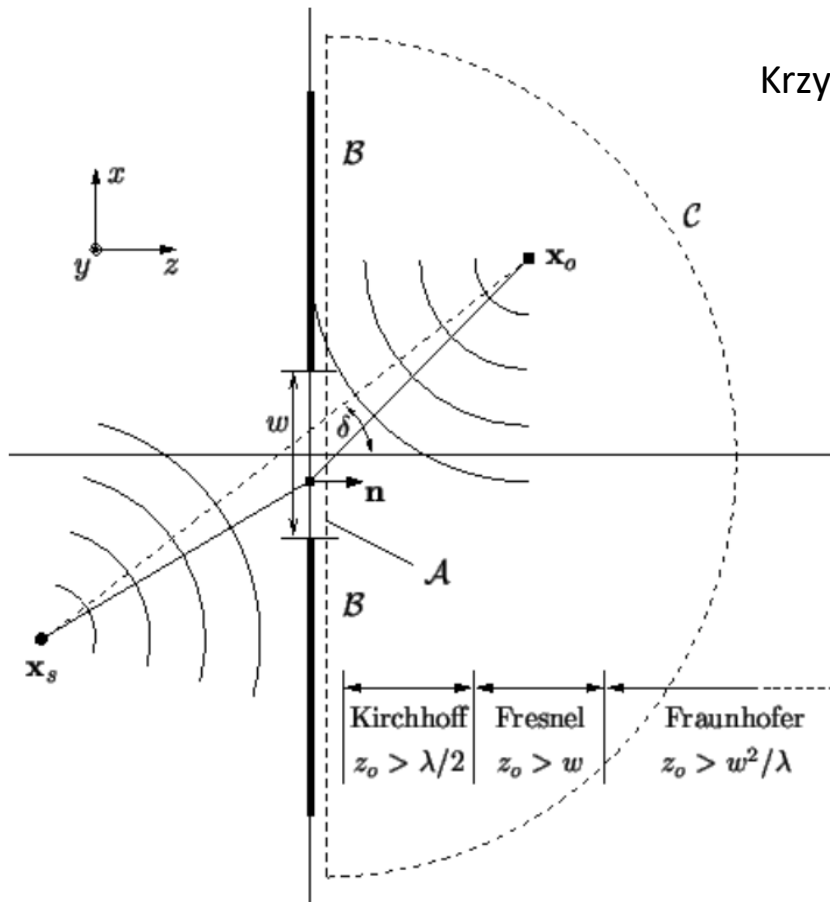
Jeśli gradient policzy się wzdłuż normalnych dostaje się:

Strumień przepływający przez objętość otoczoną powierzchnią S

$$\oiint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dV$$

# Dyfrakcja

Rozważmy dyfrakcję na otworze o wielkości  $w$ , fali rozchodzącej się z punktu  $\mathbf{x}_s$ .



Krzywą zamkniętą  $S$ , po której całkujemy dzielimy na 3 części:

A - Obszar otworu

$$U(x) = U_S(x) \quad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = \frac{\partial U_S(x)}{\partial n}$$

B - Powierzchnia ekranu

$$U(x) = 0 \quad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = 0$$

C - ograniczenie w wolnej przestrzeni

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\| \left( \frac{\partial U(x)}{\partial n} - ikU(x) \right) = 0$$

**Warunek Sommerfelda**

Czyli wpływ ekranu i wolnej przestrzeni równy jest 0.

Zostaje tylko **OTWÓR W EKRANIE**.

$$U(x_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_A \left[ \frac{\partial U(x)}{\partial n} G(x) - U_S(x) \frac{\partial G(x)}{\partial n} \right] ds$$

Aby rozwiązać to zagadnienie musimy poczynić kilka założeń.

- Fala wejściowa ma postać fali sferycznej:

$$U_S(x_S) = A_S \frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S} \quad r_S = \|x_S - x\|$$

- Odległość punktu skąd startuje fala wejściowa  $x_S$  i punktu obserwacji  $x_0$  jest dużo większa niż długość fali:

$$\lambda \ll r_0, r_S$$

- Funkcja G również ma postać fali sferycznej:

$$G(x) = \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \quad r_0 = \|x_0 - x\|$$

Dostajemy:

$$\frac{\partial U_S(x)}{\partial n} \cong ik_0 A_S \cos(n, x_S - x) \frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S}$$

$n$  – normalna do płaszczyzny otworu

$$\frac{\partial G(x)}{\partial n} \cong ik_0 \cos(n, x_0 - x) \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

i po podstawieniu do równania Helmholtza-Kirchhoffa:

$$U(x_0) = \frac{iA_S}{\lambda} \iint_A \frac{e^{ik_0(r_S+r_0)}}{r_S r_0} \left[ \frac{\cos(n, x_0 - x) - \cos(n, x_S - x)}{2} \right] ds$$

Równanie to jest symetryczne, to znaczy, możemy zamienić punkty  $x_0$  i  $x_S$ .

Jest to **twierdzenie o wzajemności Helmholtza**.

# Dyfrakcja – Kirchhoffa

Wypisując jawnie współrzędne punktów  $(x,y)$  otrzymujemy:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx dy = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) \frac{e^{iksrs}}{r_S} dx dy$$

gdzie:

$$h(x_0, y_0, x, y) = \frac{i}{\lambda} \left[ \frac{\cos(n, x_0 - x) - \cos(n, x_S - x)}{2} \right] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

czyli dyfrakcja zależna jest od funkcji  $h(x_0, y_0, x, y)$ , w której zawarte są informacje o wzajemnym położeniu punktu obserwacji i punktu skąd pochodzi fala padająca oraz od kształtu otworu, o którym informacja zawarta jest w obszarze całkowania.

Wzór ten jest prawdziwy dla odległości  $z > \lambda/2$

Jest trudny do praktycznego stosowania, dlatego wprowadza się kolejne przybliżenia.

**Wniosek Huygensa** – dyfrakcja to złożenie fal kulistych rozchodzących się z płaszczyzny otworu

Z dokładnością do: czynnika  $1/\lambda$ , czynnika kierunkowego  $[(\cos-\cos)/2]$ , fazy  $\pi/2$

# Dyfrakcja – Hyugensa-Fresnela

Przyjmując:

$$\frac{\cos(n, x_0 - x) - \cos(n, x_S - x)}{2} = 1$$

Prawdziwe jeśli źródło i punkt obserwacji daleko w porównaniu z wielkością otworu

Uzyskujemy:

$$U(x_0, y_0) = \frac{i}{\lambda} \iint_{x,y} U(x, y) \frac{e^{ik_S r_S}}{r_S} dx dy$$

**Dyfrakcja Hyugensa-Fresnela**

czyli złożenie fal kulistych z obrębu otworu



# Dyfrakcja Fresnela

Dla dużej odległości ekranu od otworu:

$$\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \approx \frac{e^{ik_0 r_0}}{z_0}$$

Dodatkowo rozwińmy w szereg Taylora wyrażenia  $k_0 r_0$  z równania:

$$h(x_0, y_0, x, y) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

$$k_0 r_0 = k_0 \sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = k_0 z_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_0}{z_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - y_0}{z_0} \right)^2 \mp \dots \right)$$

Biorąc tylko człony kwadratowe otrzymujemy:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}$$

Przybliżenie prawdziwe dla:  $(2z_0)^3 \gg k_0 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]_{max}^2$

Lub równoważnie:  $z_0 \gg w$  gdzie  $w$  jest wielkością otworu.

# Dyfrakcja Fraunhofera

Pomijając dalej kolejne wyrażenia:

$$\begin{aligned}k_0 r_0 &= k_0 \sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \\&= k_0 z_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x_0}{z_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - y_0}{z_0} \right)^2 \mp \dots \right) = \\&= k_0 z_0 \left( 1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{z_0^2} + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} \mp \dots \right)\end{aligned}$$

uzyskujemy:

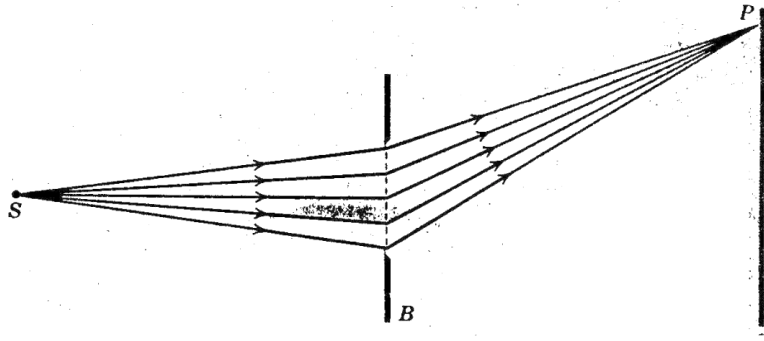
$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} (x_0^2 + y_0^2)} e^{i \frac{k_0}{z_0} (xx_0 + yy_0)}$$

Przybliżenie prawdziwe dla:  $2z_0 \gg k(x^2 + y^2)_{max}$

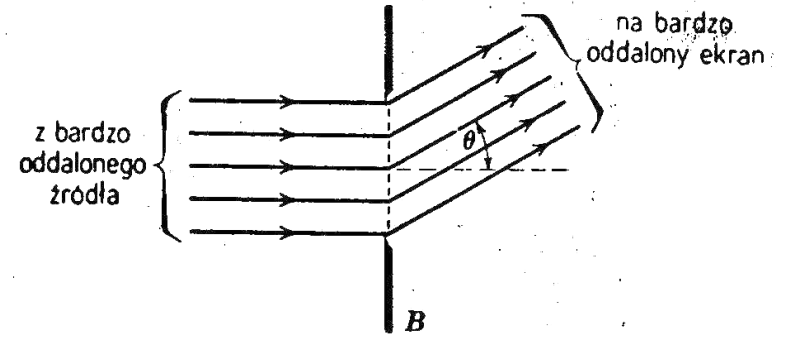
Lub równoważnie:  $z_0 \gg \frac{w^2}{\lambda}$  gdzie  $w$  jest wielkością otworu.

# Dyfrakcja

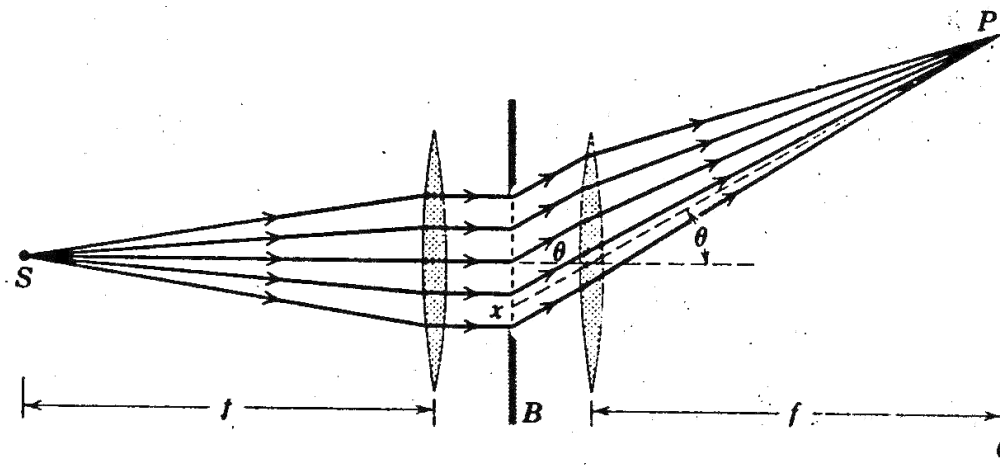
Fresnel:



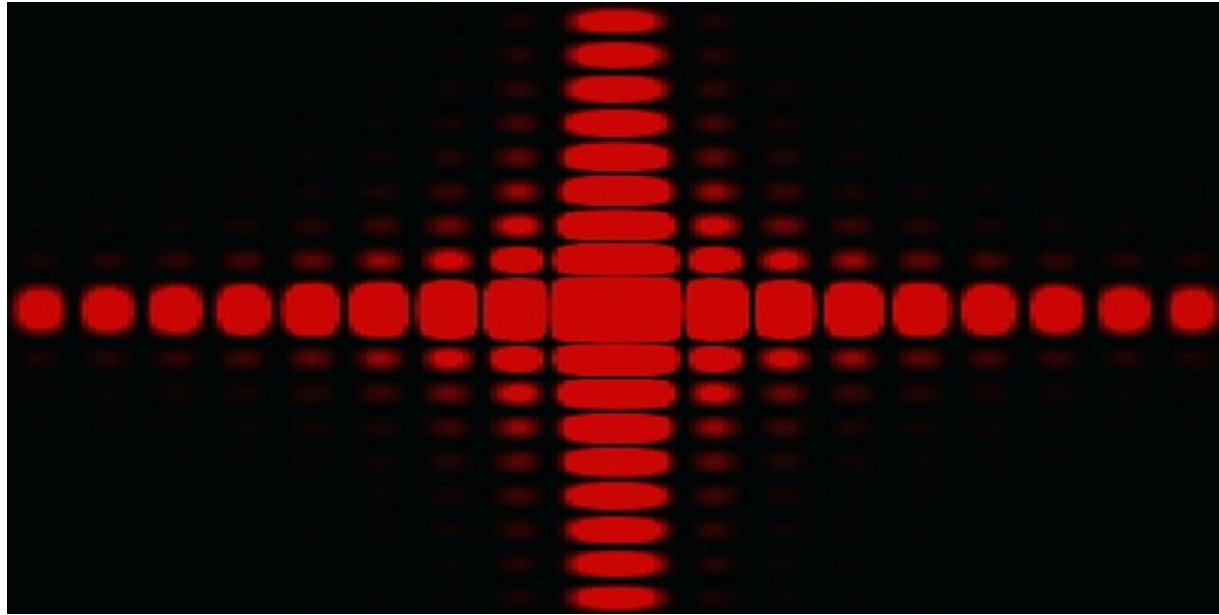
Fraunhofer:



Sprowadzenie dyfrakcji Fresnela do dyfrakcji Fraunchofera:



# Dyfrakcja - przykłady



*en.wikipedia.org*

*es.123rf.com*



# Dyfrakcja - przykłady

## Odbiciowa siatka dyfrakcyjna

Przykładowa siatka – płyta CD

Odległość między ścieżkami:  $d = 1,6 \mu\text{m}$

Liczba linii na mm:  $N = 625$

Długość fali (laser He-Ne):  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$



Rzędy ugięcia:

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d}\right)$$

Czyli:  $\theta_1 = 23,2972$

$\theta_2 = 52,2791$

$\theta_3 = \text{nie ma}$

Rozdzielczość siatki dyfrakcyjnej:

Określa możliwość rozdzielenia dwóch długości fali różniących się o  $\Delta\lambda$

Maksimum od jednej wypada w pierwszym minimum od drugiej (kryterium Rayleigha)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd |\sin \theta - \sin \theta_0|}{\lambda}$$

gdzie:

$\vartheta_0$  – kąt padania wiązki na siatkę

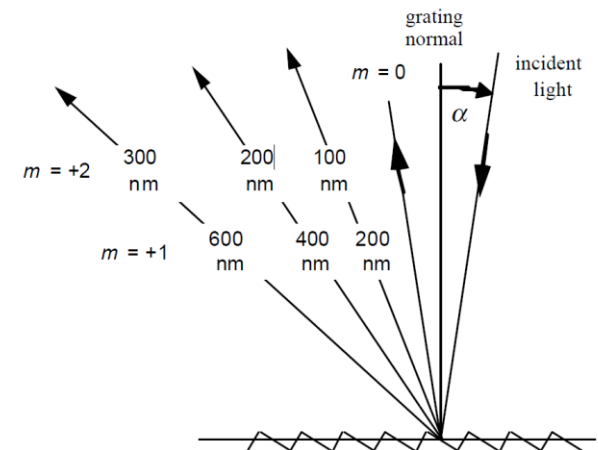
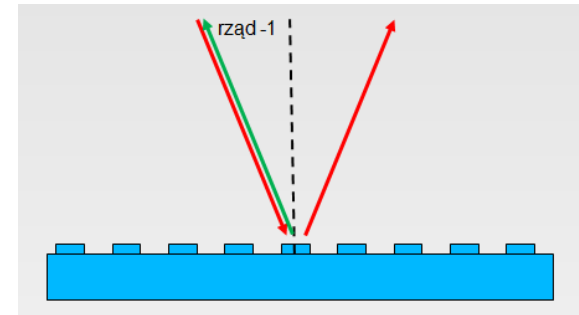
$$\Delta\lambda = 0,506 \text{ nm}$$

(2 rząd)

# Dyfrakcja

Matlab animacje:

- Wiązka monochromatyczna
- Światło białe
  - konfiguracja Litrowa – dla danej długości fali wiązka w danym rzędzie dyfrakcyjnym biegnie jak wiązka padająca – działa dla tej długości fali jak zwierciadło.
- Nakładanie się kolejnych rzędów dyfrakcyjnych



# Siatka dyfrakcyjna

Wydajność siatki dyfrakcyjnej:

Stosunek energii padającej na siatkę do energii ugiętej w pierwszy rząd dyfrakcyjny

$$\eta = \frac{I_1}{I_0}$$

Dla siatki amplitudowej:  $\eta_{\max} = 6,25\%$

Dyspersja siatki dyfrakcyjnej:

$$D = \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\lambda \cos \beta} .$$

W konfiguracji Littrowa:

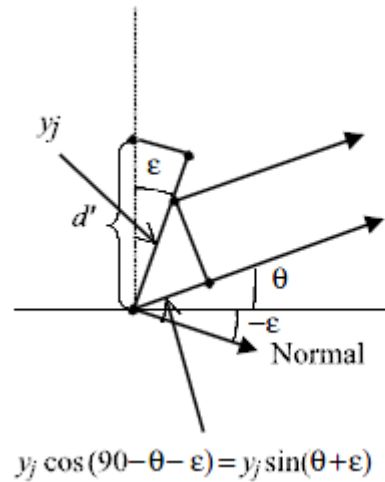
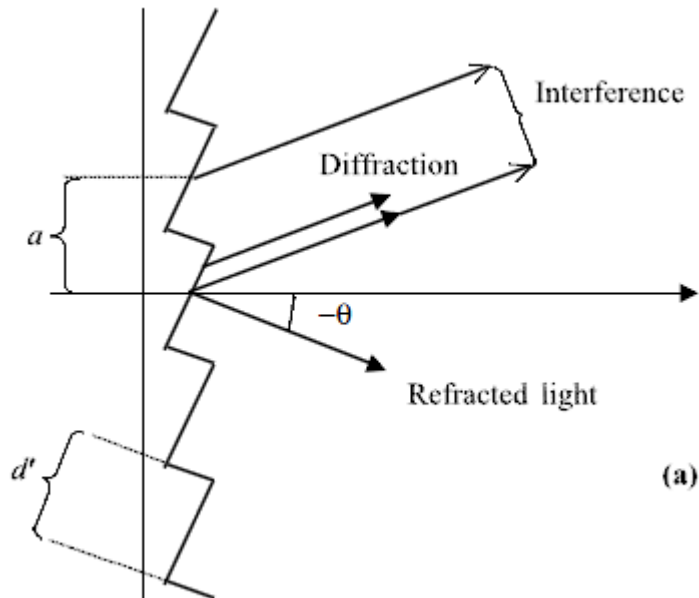
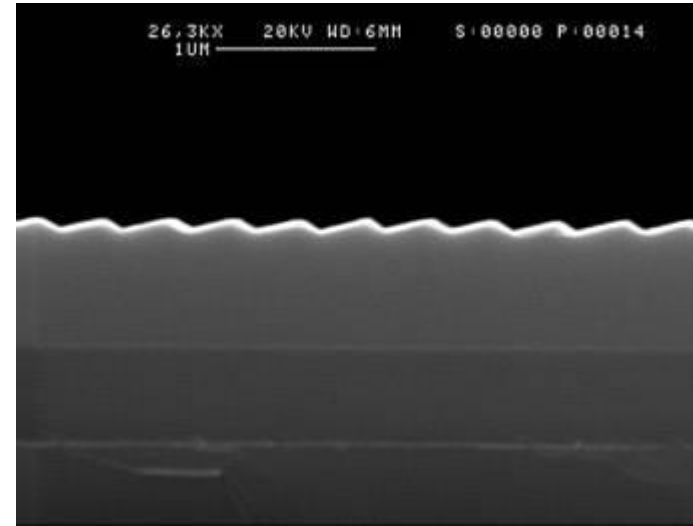
$$D = \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{2}{\lambda} \tan \beta$$

# Siatka dyfrakcyjna

Siatka karbowana (blazed):

Może być w wersji fazowej i w wersji amplitudowej.

W obu przypadkach opis jak w wersji fazowej – pochylenie wprowadza zmianę fazy

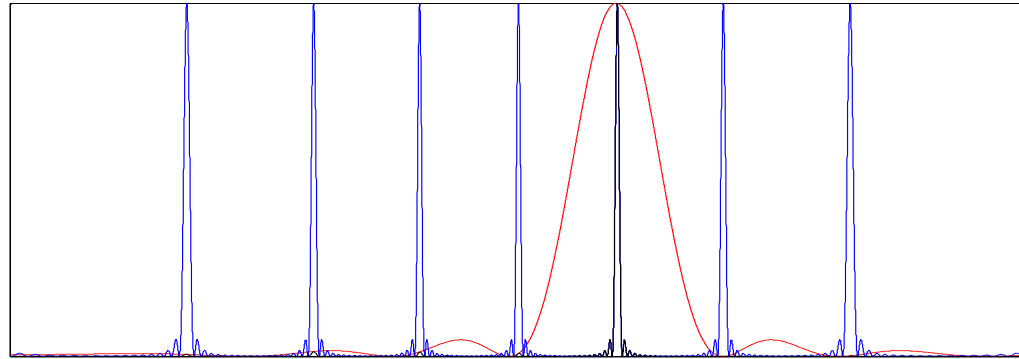


$$I(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi d \sin(\theta + \epsilon) / \lambda)}{\pi d \sin(\theta + \epsilon) / \lambda} \right]^2 \left[ \frac{\sin(\pi N a \sin \theta / \lambda)}{N \sin(\pi a \sin \theta / \lambda)} \right]^2$$

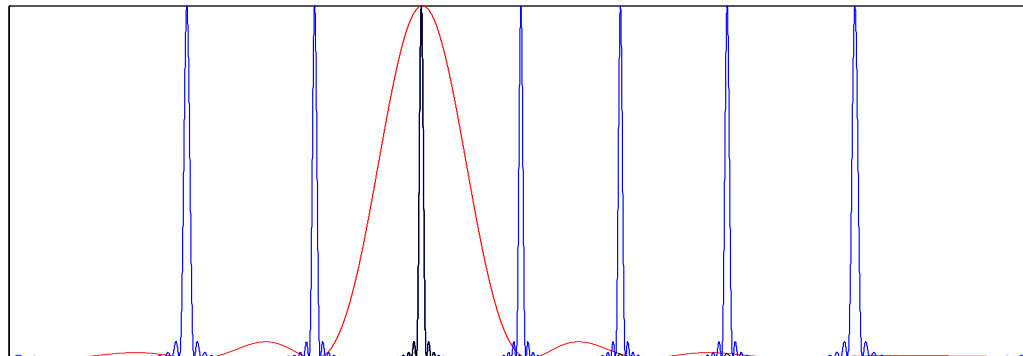


# Siatka dyfrakcyjna

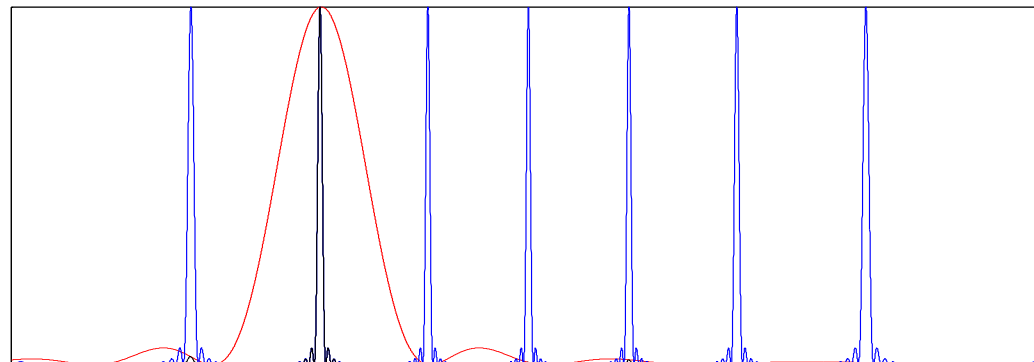
$$\varepsilon = -0,25$$



$$\varepsilon = 0,25$$

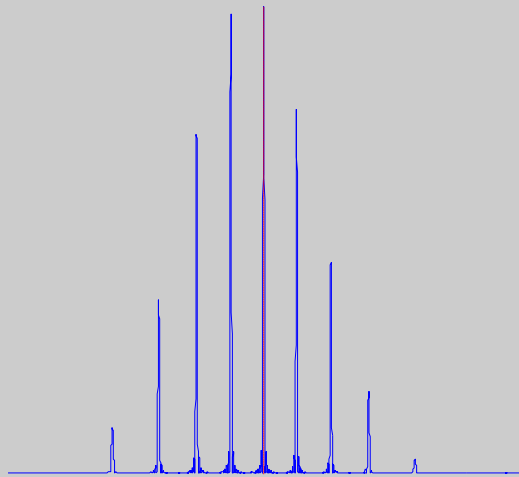


$$\varepsilon = 0,52$$

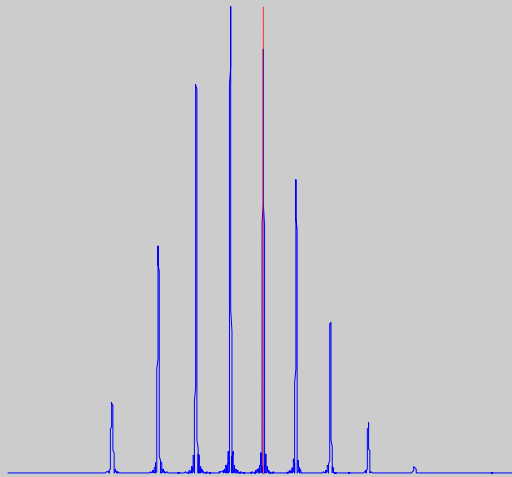


# Siatka dyfrakcyjna

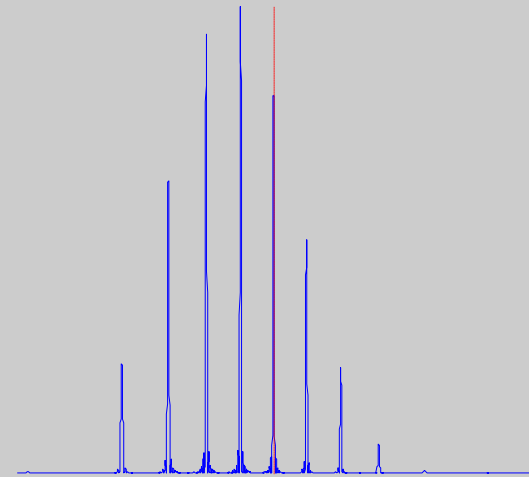
kat = 5



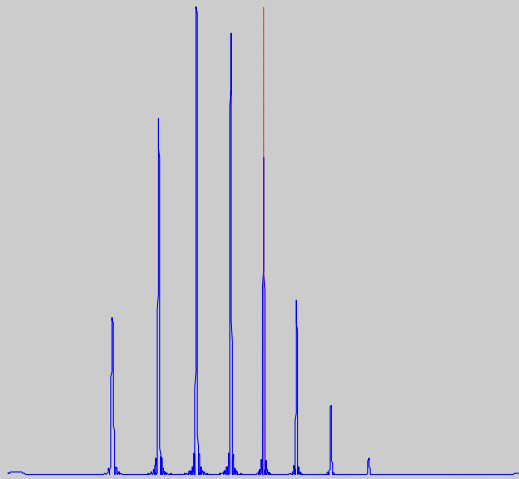
kat = 10



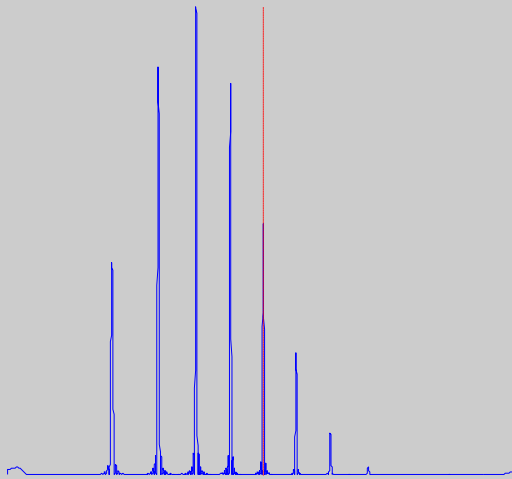
kat = 15



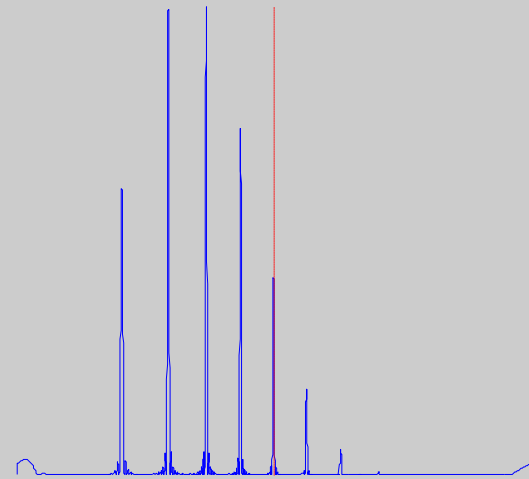
kat = 20



kat = 25



kat = 30

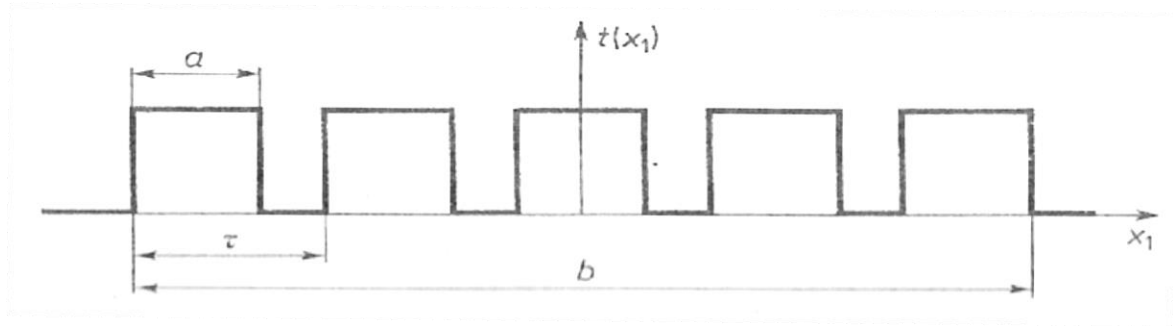


# Siatka dyfrakcyjna

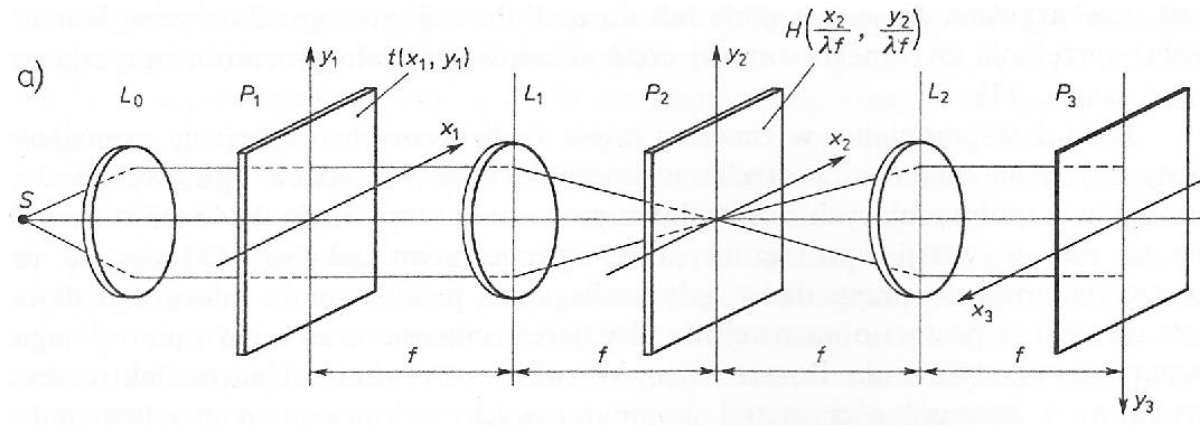
Rozważamy jak zmienia się obraz siatki dyfrakcyjnej po filtracji:

Siatka dyfrakcyjna:

$$t(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x_1 - m\tau}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{x_1}{b}\right)$$



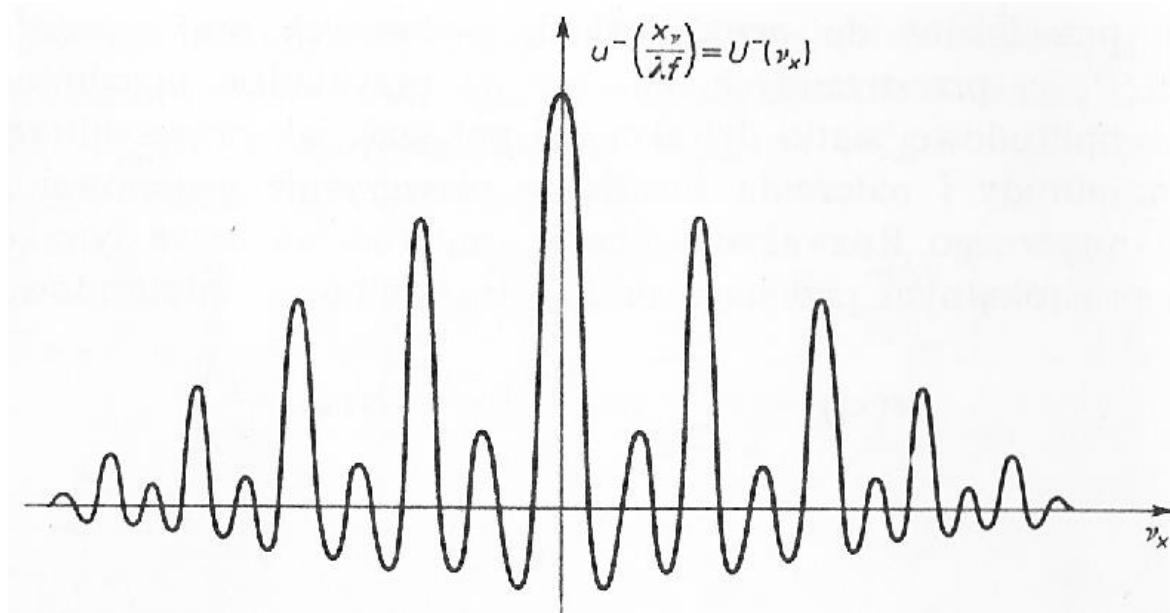
Układ do filtracji:



# Siatka dyfrakcyjna

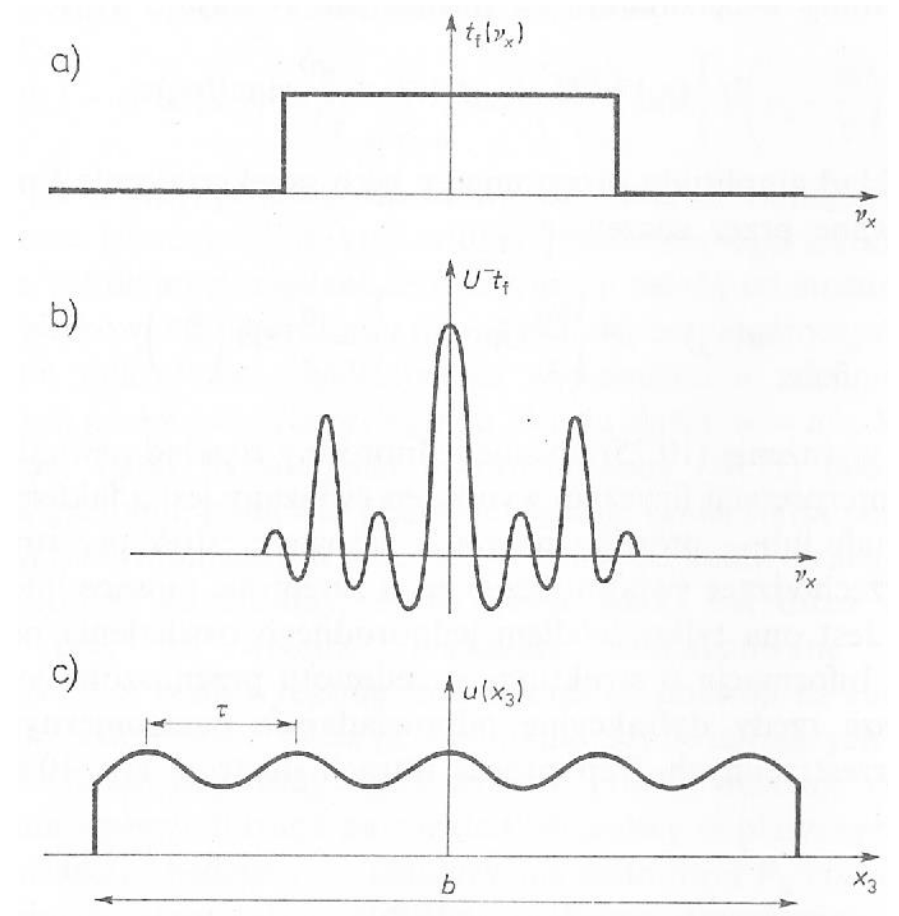
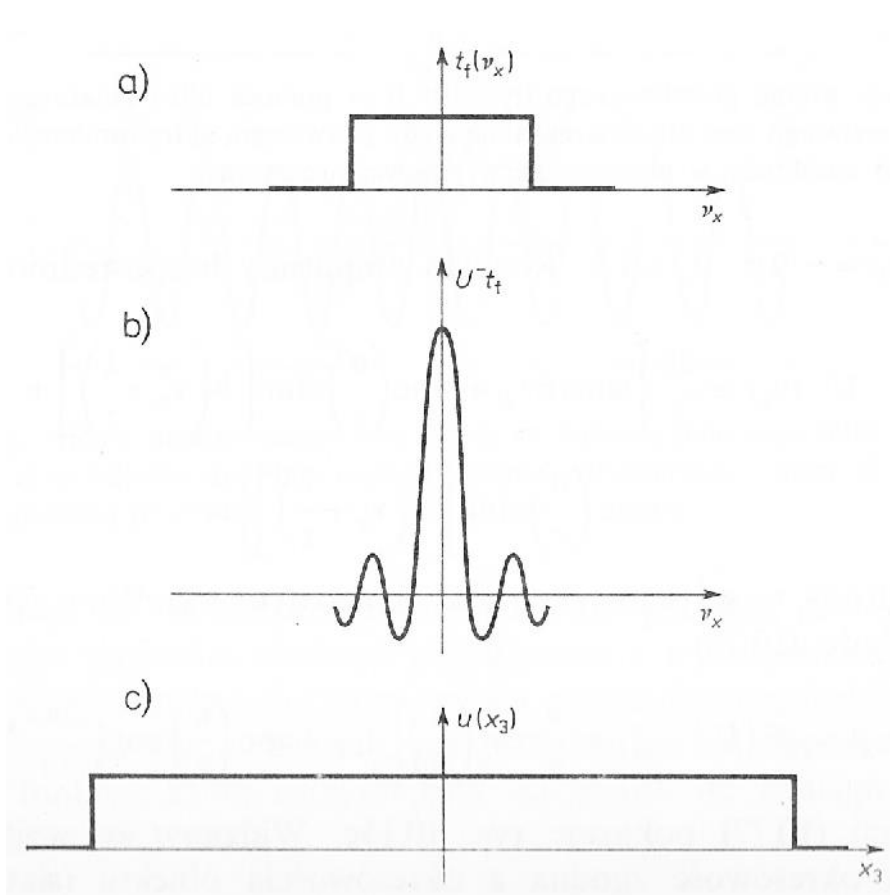
Sygnal w płaszczyźnie fourierowskiej:

$$U^-(v_x) \sim \mathcal{F}\{t(x_1)\} = \frac{ab}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{am}{\tau}\right) \operatorname{sinc}\left[b\left(v_x - \frac{m}{\tau}\right)\right]$$



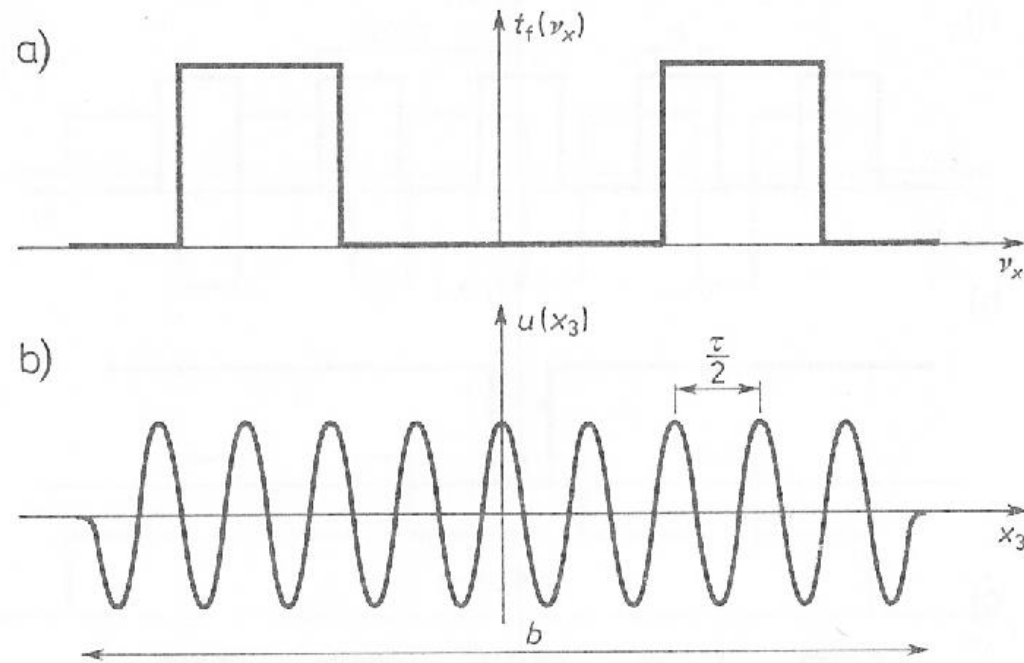
# Siatka dyfrakcyjna

Filtracja dolnoprzepustowa:



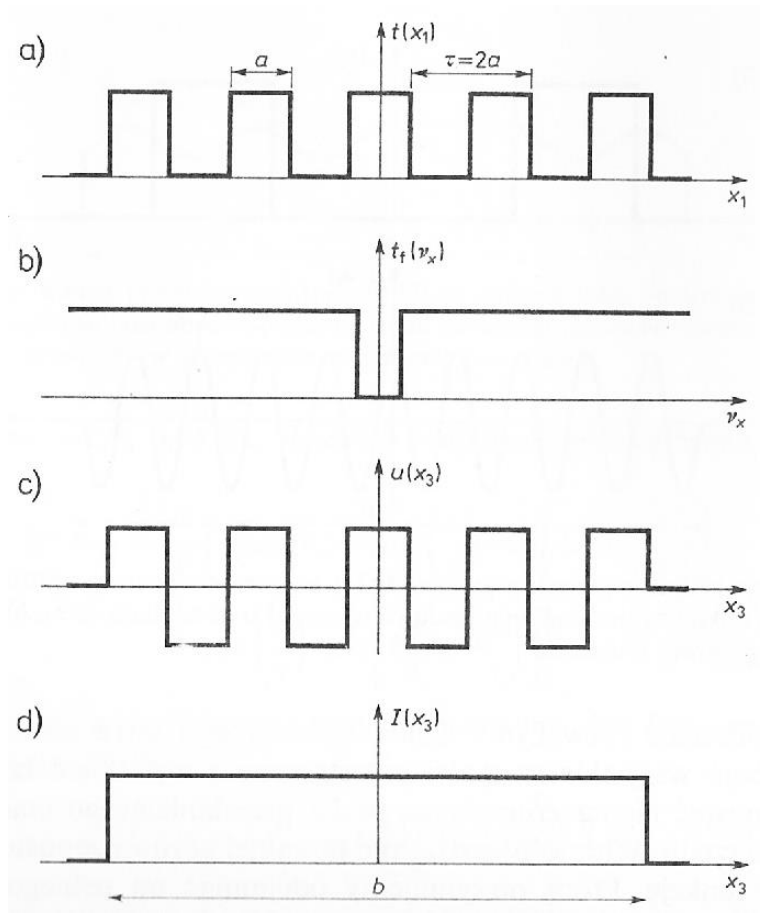
# Siatka dyfrakcyjna

Filtracja środkowoprzepustowa:

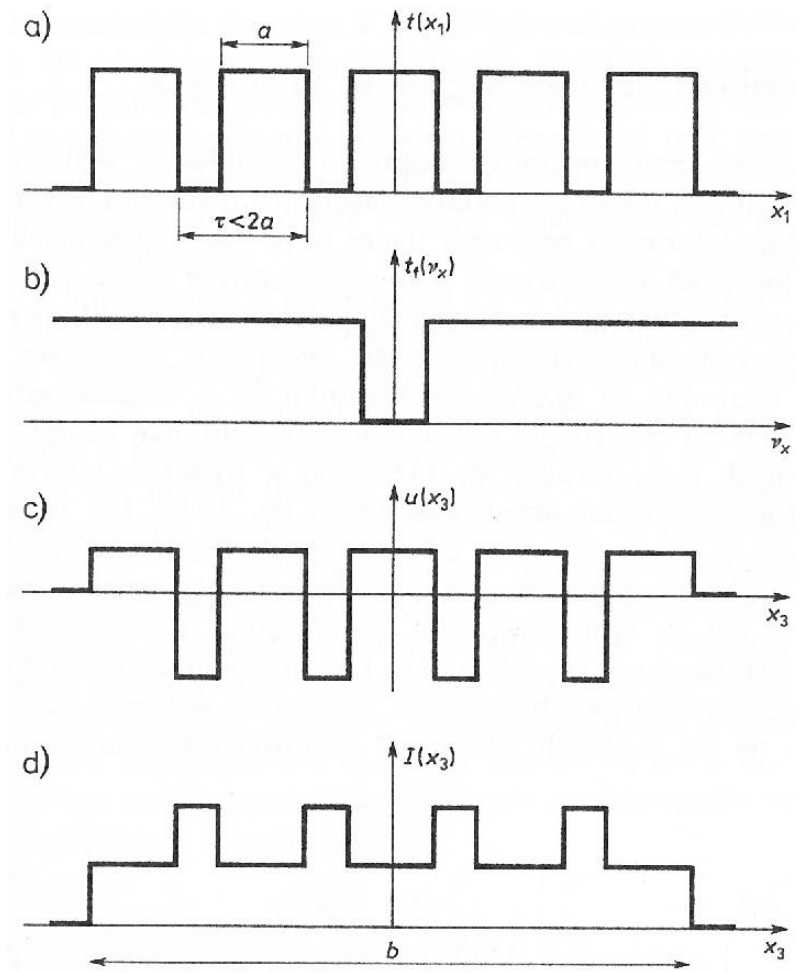


# Siatka dyfrakcyjna

Filtracja górnoprzepustowa:



Jednorodne natężenie



odwrócenie kontrastu