1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

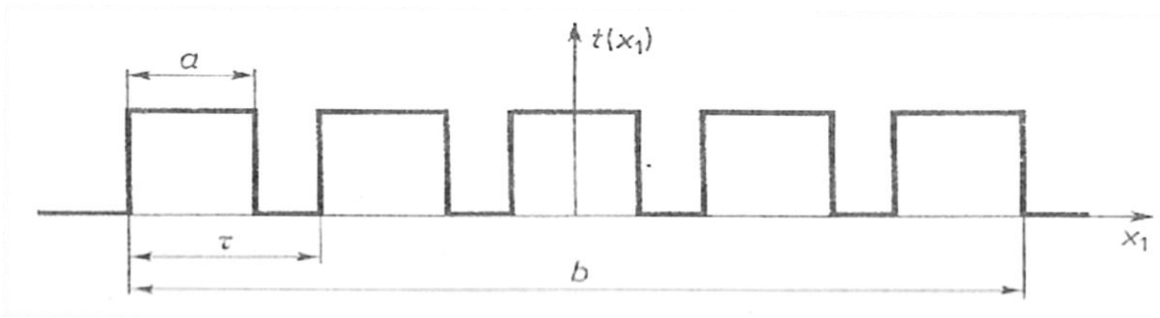
dr hab. Rafał Kasztelanic

Siatka dyfrakcyjna

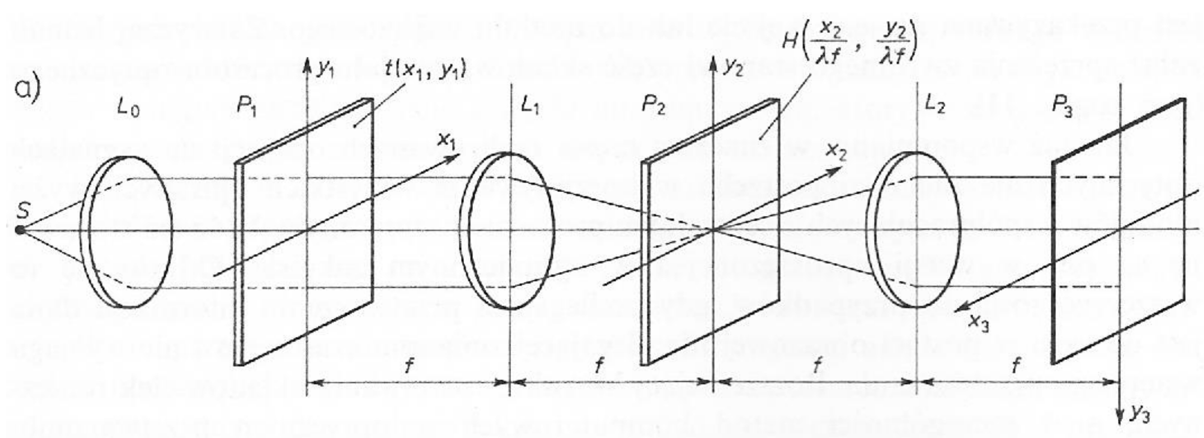
Rozważamy jak zmienia się obraz siatki dyfrakcyjnej po filtracji:

Siatka dyfrakcyjna:

$$t(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_1 - m\tau}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{b}\right)$$



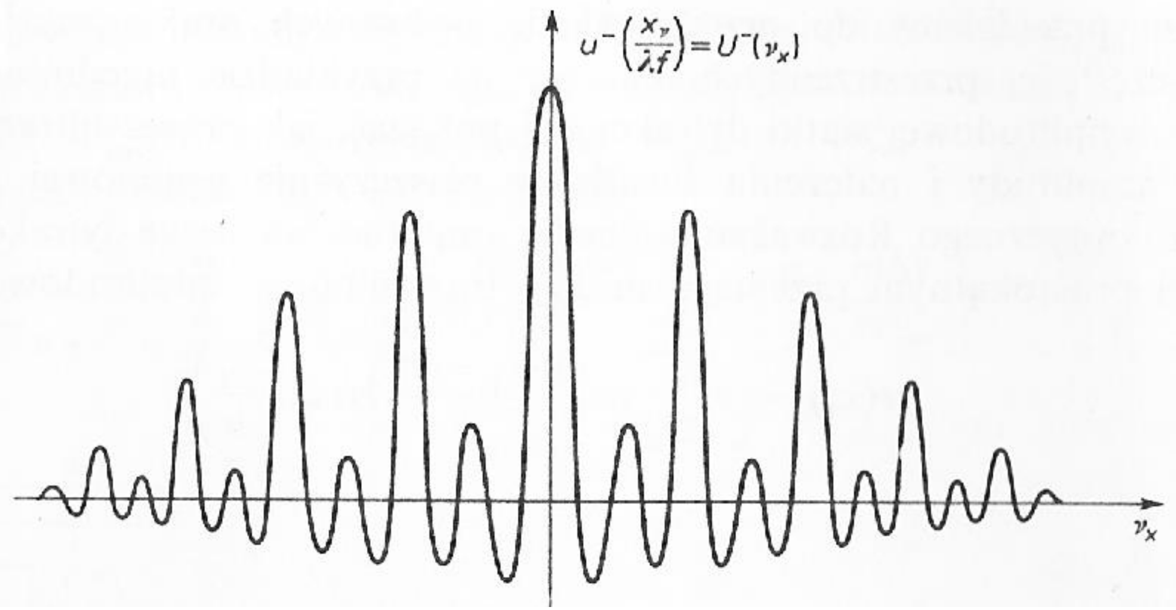
Układ do filtracji:



Siatka dyfrakcyjna

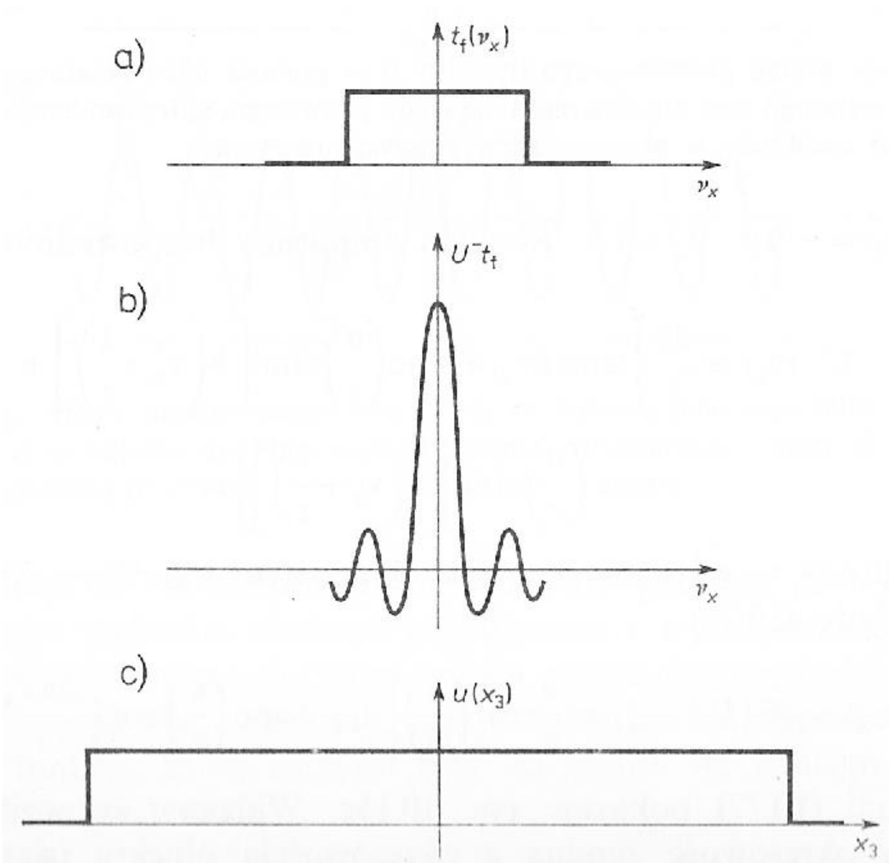
Sygnał w płaszczyźnie fourierowskiej:

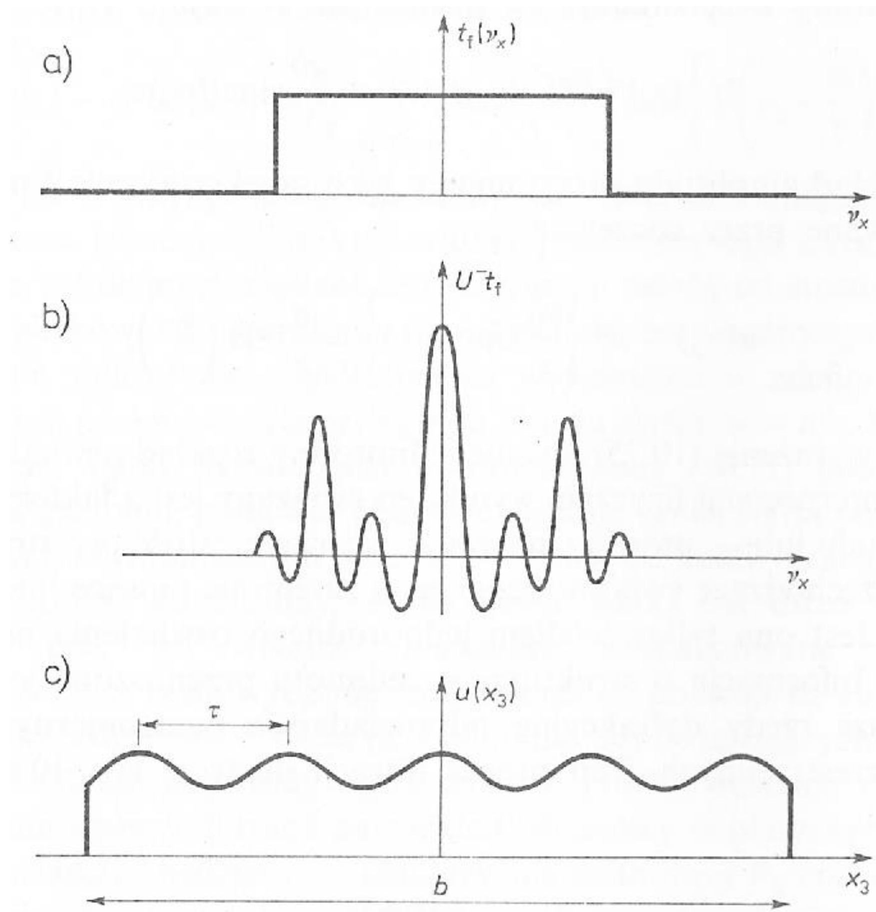
$$U^{-}(\nu_x) \sim \mathscr{F}\{t(x_1)\} = \frac{ab}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{am}{\tau}\right) \operatorname{sinc}\left[b\left(\nu_x - \frac{m}{\tau}\right)\right]$$



Siatka dyfrakcyjna

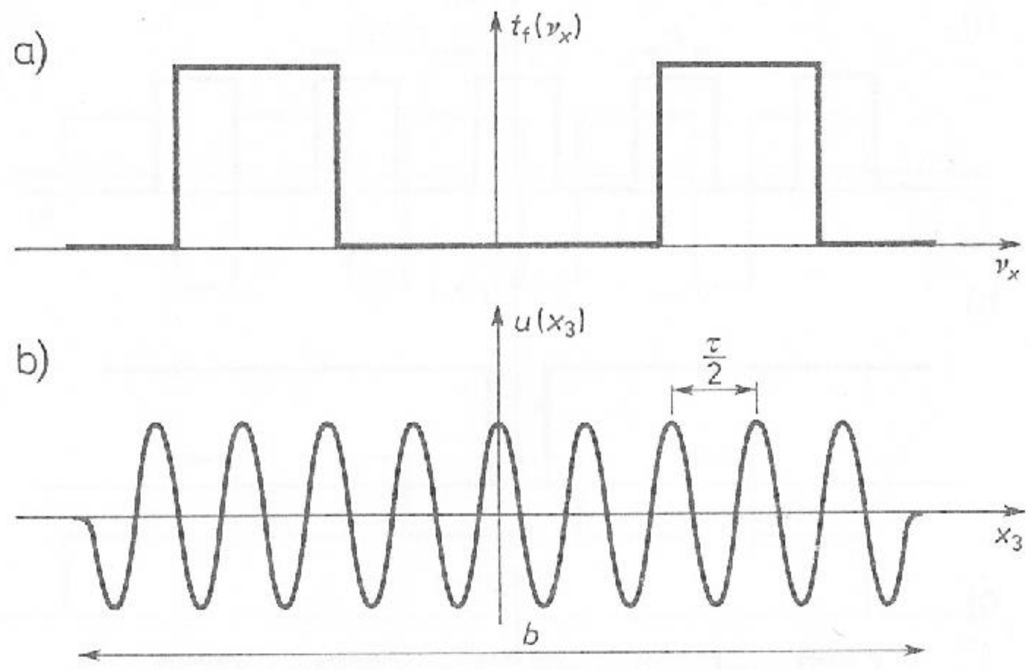
Filtracja dolnoprzepustowa:





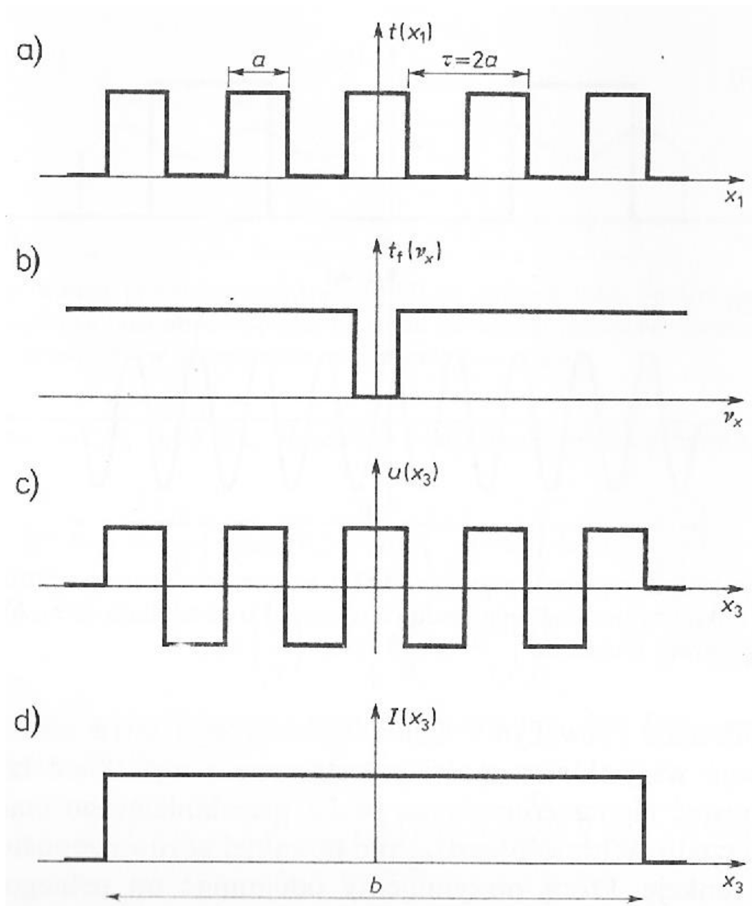
Siatka dyfrakcyjna

Filtracja środkowoprzepustowa:

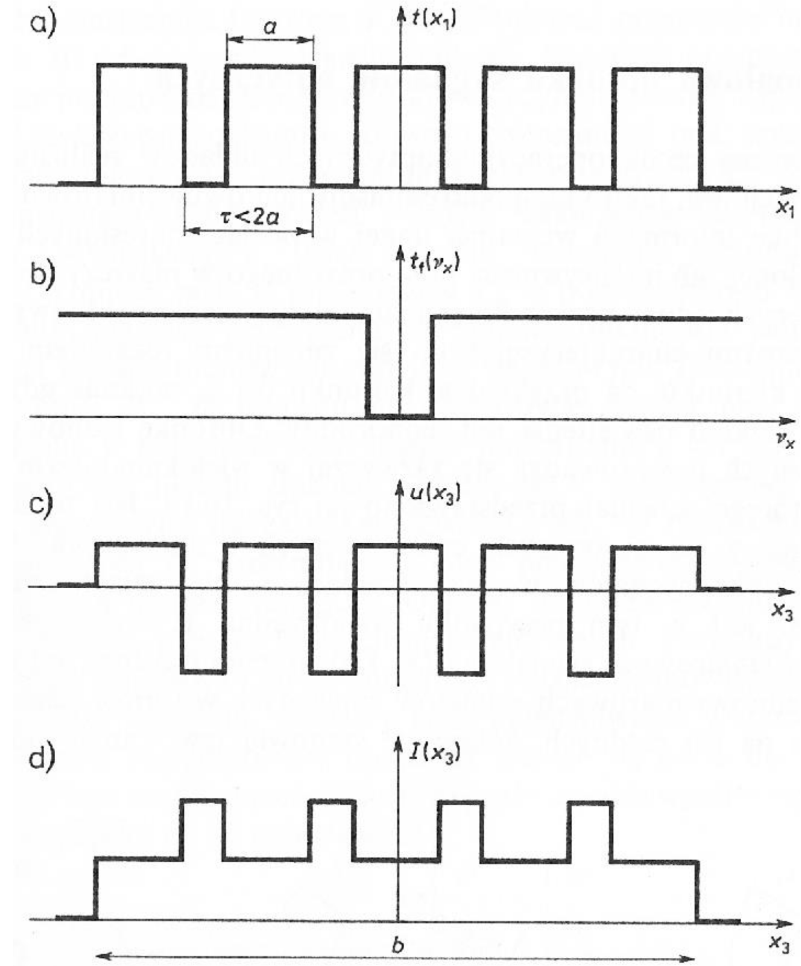


Siatka dyfrakcyjna

Filtracja górnoprzepustowa:



Jednorodne natężenie



odwrócenie kontrastu

CzestPrzestrzenne.m
Cw 3.2.m

Dyfrakcja

Punktem wyjścia jest równanie Helmholtza: $[\Delta + k^2]U(\boldsymbol{x}) = 0$

Rozwiązanie równania falowego w postaci fal monochromatycznych

gdzie $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{\lambda}$ jest wektorem falowym.

Właściwości danego pola *U* zależą wyłącznie od położenia i czasu: $U(\boldsymbol{x}, t) = Re\{U(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}\}$

Obliczenie własności zespolonego pola *U(**x**)* w dowolnym punkcie przestrzeni ***x*** możliwe jest przy wykorzystaniu funkcji Greena:

$$U(\boldsymbol{x_0}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S [\boldsymbol{\nabla} U(x)\, G(x) - U(x)\, \boldsymbol{\nabla} G(x)] dS$$

Jest to podstawowe równanie skalarnej teorii dyfrakcji (równanie Helmholtza-Kirchhoffa).

Pozwala ono na sprowadzenie problemu dyfrakcji do rozważania pól rozchodzących się bez przeszkód oraz pól pochodzących od przeszkód, które stają się źródłem fal sferycznych.

Całkowanie odbywa się po powierzchni zamkniętej *S,* która otacza dany punkt.

Dyfrakcja

Twierdzenie Gaussa:

$$\overbrace{\int_V \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{U}}_{\substack{\text{net outflow}\\ \text{of flux per}\\ \text{unit volume}}}\, dV}^{\substack{\text{total outflow of flux}\\ \text{from the volume } V}} = \underbrace{\int_S \mathbf{U}\cdot d\mathbf{s}}_{\substack{\text{total outflow of flux}\\ \text{from the surface } S}}$$

Mamy dwie funkcje ciągłe i dwukrotnie różniczkowalne U i G:

$$\begin{array}{rl} & \nabla\cdot(U\nabla G) = U\nabla\cdot\nabla G + (\nabla U)\cdot(\nabla G) \\ - & \nabla\cdot(G\nabla U) = G\nabla\cdot\nabla U + (\nabla G)\cdot(\nabla U) \\ \hline & \nabla\cdot(U\nabla G - G\nabla U) = U\nabla^2 G - G\nabla^2 U \end{array}$$

Liczymy teraz całkę po objętości, w której określone są te funkcje:

„Przepływ” w objętości V

$$\iiint_V \nabla\cdot(U\nabla G - G\nabla U)dV = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U)dV$$

Lewą stronę z teorii Gaussa można zastąpić całką po powierzchni:

$$\oiint_S (U\nabla G - G\nabla U)\, dS = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U)dV$$

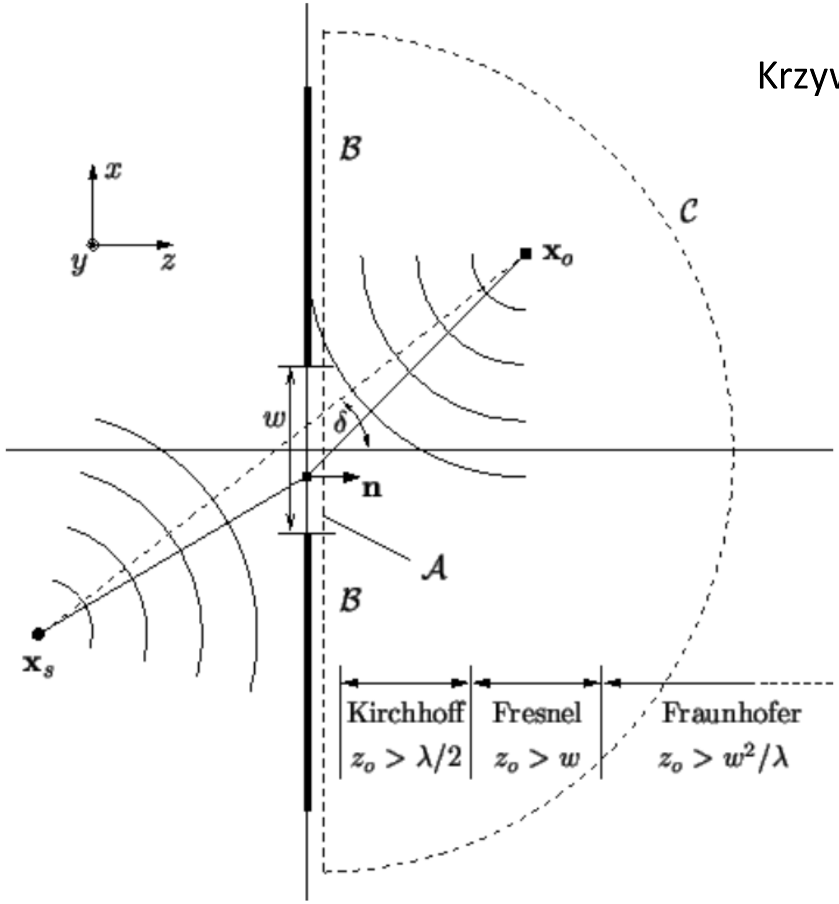
Jeśli gradient policzy się wzdłuż normalnych dostaje się:

Strumień przepływający przez objętość otoczoną powierzchnią S

$$\boxed{\iint_S \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS} = \iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U)dV$$

Dyfrakcja

Rozważmy dyfrakcję na otworze o wielkości w, fali rozchodzącej się z punktu $\boldsymbol{x_S}$.



Krzywą zamkniętą *S*, po której całkujemy dzielimy na 3 części:

A - Obszar otworu

$$U(x) = U_s(x) \qquad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = \frac{\partial U_S(x)}{\partial n}$$

B – Powierzchnia ekranu

$$U(x) = 0 \qquad \frac{\partial U(x)}{\partial n} = 0$$

C – ograniczenie w wolnej przestrzeni

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\| \left(\frac{\partial U(x)}{\partial n} - ikU(x) \right) = 0$$

Warunek Sommerfelda

Dyfrakcja

Czyli wpływ ekranu i wolnej przestrzeni równy jest 0.
Zostaje tylko OTWÓR W EKRANIE.

$$U(x_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_A \left[\frac{\partial U(x)}{\partial n} G(x) - U_S(x) \frac{\partial G(x)}{\partial n} \right] ds$$

Aby rozwiązać to zagadnienie musimy poczynić kilka założeń.

- Fala wejściowa ma postać fali sferycznej:

$$U_S(x_S) = A_S \frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S} \qquad r_S = \|x_S - x\|$$

- Odległość punktu skąd startuje fala wejściowa $\boldsymbol{x_S}$ i punktu obserwacji $\boldsymbol{x_0}$ jest dużo większa niż długość fali:

$$\lambda \ll r_0, r_S$$

- Funkcja G również ma postać fali sferycznej:

$$G(x) = \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \qquad r_0 = \|x_0 - x\|$$

Dyfrakcja

Dostajemy:

$$\frac{\partial U_S(x)}{\partial n} \cong ik_0 A_S cos(n, x_S - x)\frac{e^{ik_0 r_S}}{r_S}$$

n – normalna do płaszczyzny otworu

$$\frac{\partial G(x)}{\partial n} \cong ik_0 cos(n, x_0 - x)\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

i po podstawieniu do równania Helmholtza-Kirchhoffa:

$$\boxed{U(x_0) = \frac{iA_S}{\lambda}\iint_A \frac{e^{ik_0(r_S+r_0)}}{r_S r_0}\left[\frac{cos(n, x_0 - x) - cos(n, x_S - x)}{2}\right] ds}$$

Równanie to jest symetryczne, to znaczy, możemy zamienić punkty x_0 i x_S .
Jest to **twierdzenie o wzajemności Helmholtza**.

Dyfrakcja – Kirchhoffa

Wypisując jawnie współrzędne punktów *(x,y)* otrzymujemy:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx\, dy = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) \frac{e^{ik_S r_S}}{r_S} dx\, dy$$

gdzie:

$$h(x_0, y_0, x, y) = \frac{i}{\lambda} \left[\frac{cos(n, x_0 - x) - cos(n, x_S - x)}{2} \right] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

czyli dyfrakcja zależna jest od funkcji *h(x_0,y_0,x,y), w której zawarte są informacje o wzajemnym położeniu punktu obserwacji i punktu skąd pochodzi fala padająca oraz od kształtu otworu, o którym informacja zawarta jest w obszarze całkowania.*

Wzór ten jest prawdziwy dla odległości z>λ/2

Jest trudny do praktycznego stosowania, dlatego wprowadza się kolejne przybliżenia.

Wniosek Huygensa – dyfrakcja to złożenie fal kulistych rozchodzących się z płaszczyzny otworu

Z dokładnością do: czynnika 1/λ, czynnika kierunkowego [(cos-cos)/2], fazy π/2

Dyfrakcja – Hyugensa-Fresnela

Przyjmując:

$$\frac{cos(n, x_0 - x) - cos(n, x_S - x)}{2} = 1$$

Prawdziwe jeśli źródło i punkt obserwacji daleko w porównaniu z wielkością otworu

Uzyskujemy:

$$\boxed{U(x_0, y_0) = \frac{i}{\lambda} \iint_{x,y} U(x, y) \frac{e^{ik_S r_S}}{r_S} dx\, dy}$$

Dyfrakcja Hyugensa-Fresnela

czyli złożenie fal kulistych z obrębu otworu

Dyfrakcja Fresnela

Dla dużej odległości ekranu od otworu: $$\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \approx \frac{e^{ik_0 r_0}}{z_0}$$

Dodatkowo rozwińmy w szereg Taylora wyrażenia $k_0 r_0$ z równania: $$h(x_0, y_0, x, y) = \frac{i}{\lambda}\frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}$$

$$k_0 r_0 = k_0\sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \boxed{k_0 z_0\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y - y_0}{z_0}\right)^2 \mp \cdots\right)}$$

Biorąc tylko człony kwadratowe otrzymujemy:

$$\boxed{h(x_0, y_0, x, y) \cong i\,\frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\,e^{i\frac{k_0}{2z_0}\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}}$$

Przybliżenie prawdziwe dla: $$(2z_0)^3 \gg k_0[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]_{max}^2$$

Lub równoważnie: $z_0 \gg w$ gdzie w jest wielkością otworu.

Dyfrakcja Fraunhofera

Pomijając dalej kolejne wyrażenia:

$$k_0 r_0 = k_0\sqrt{z_0^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= k_0 z_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{z_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y - y_0}{z_0}\right)^2 \mp \cdots\right) =$$

$$= \boxed{k_0\, z_0 \left(1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0^2} - \frac{x x_0 + y y_0}{z_0^2}\right.} + \left.\frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} \mp \cdots\right)$$

uzyskujemy:

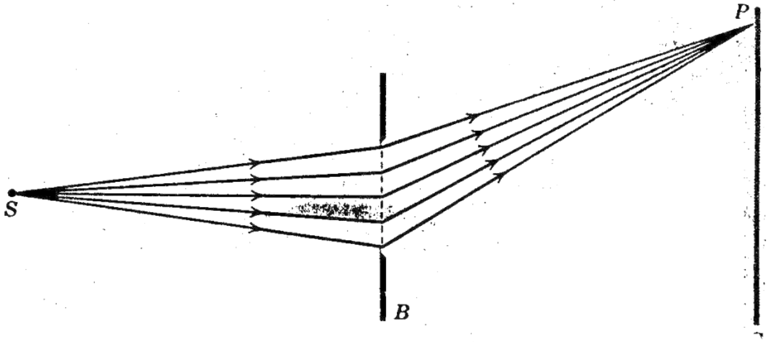
$$\boxed{h(x_0, y_0, x, y) \cong i\, \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0}\, e^{i\frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{i\frac{k_0}{z_0}(x x_0 + y y_0)}}$$

Przybliżenie prawdziwe dla: $2z_0 \gg k(x^2 + y^2)_{max}$

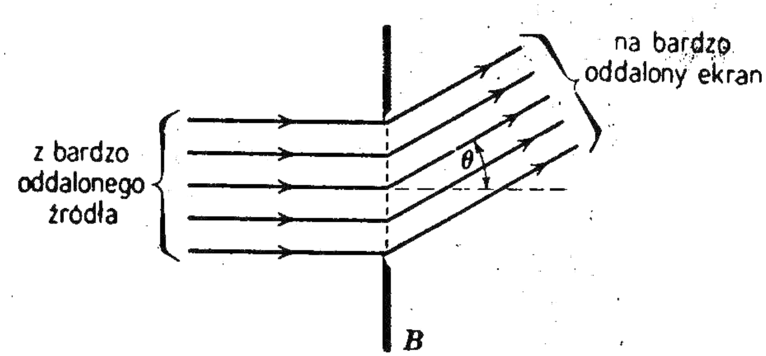
Lub równoważnie: $z_0 \gg \dfrac{w^2}{\lambda}$ gdzie *w* jest wielkością otworu.

Dyfrakcja

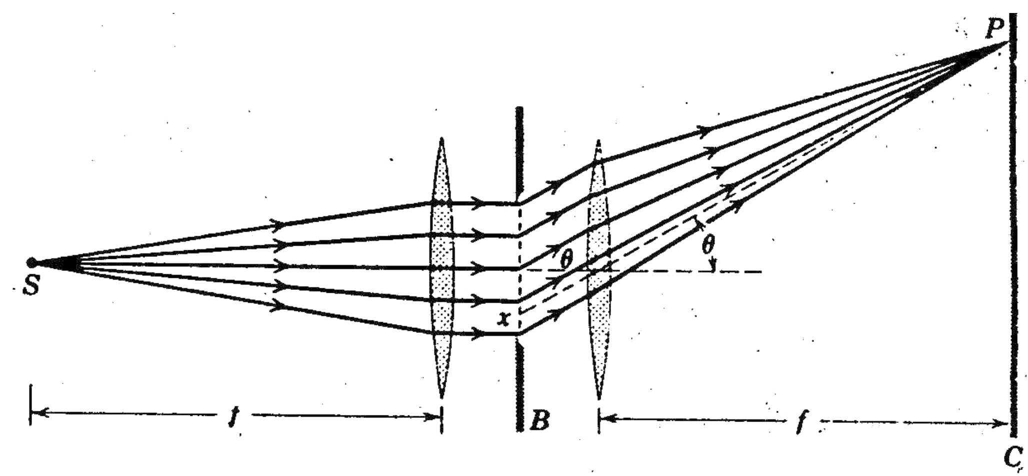
Fresnel:



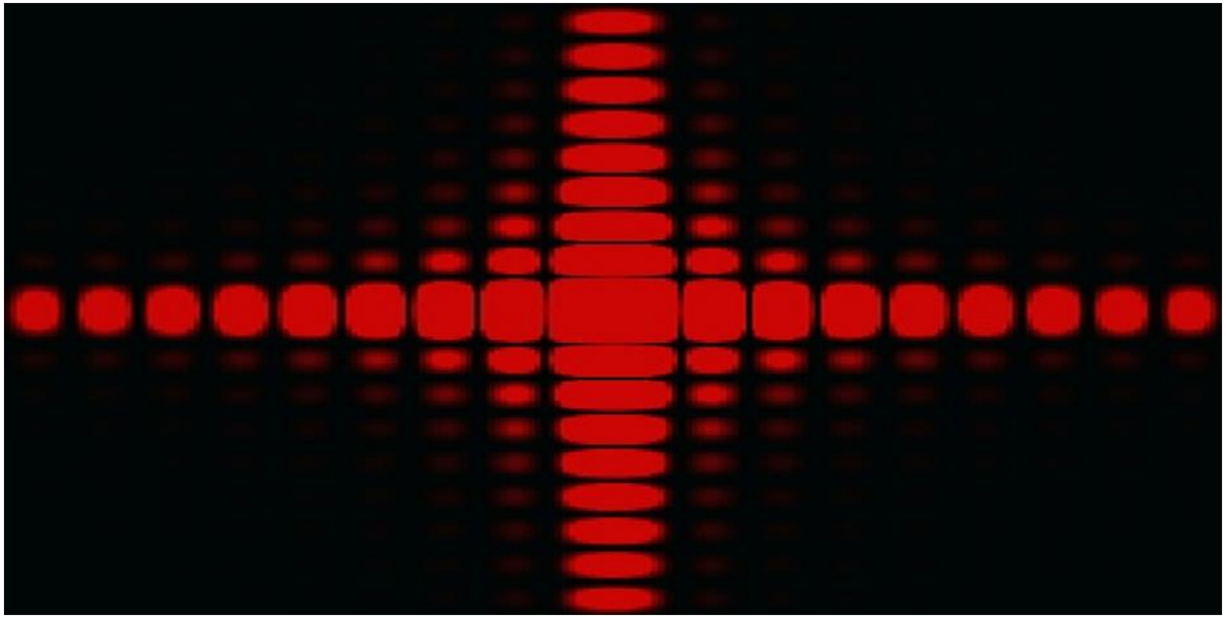
Fraunchhofer:



Sprowadzenie dyfrakcji Fresnela do dyfrakcji Fraunchofera:



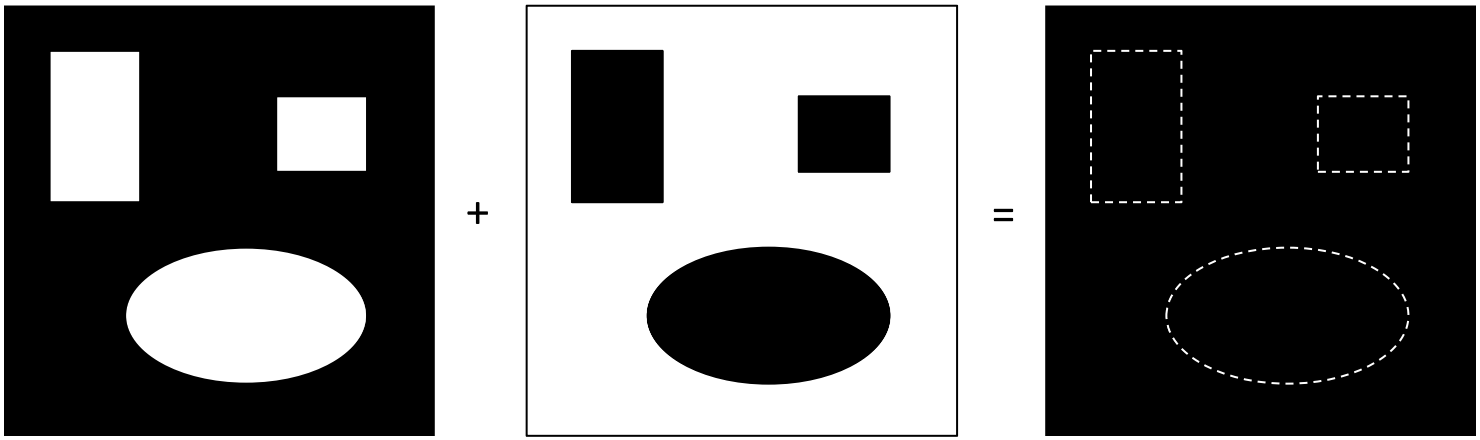
Dyfrakcja - przykłady



en.wikipedia.org

es.123rf.com

Dyfrakcja – zasada Babineta



Ekrany

E_1 E_2 0

Pole na ekranie

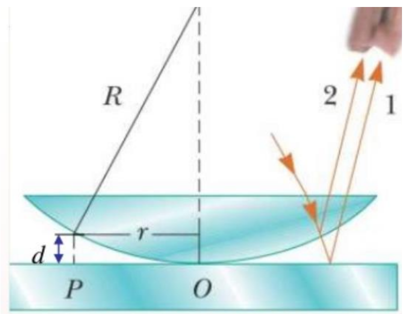
$$E_1 + E_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = -E_2$$

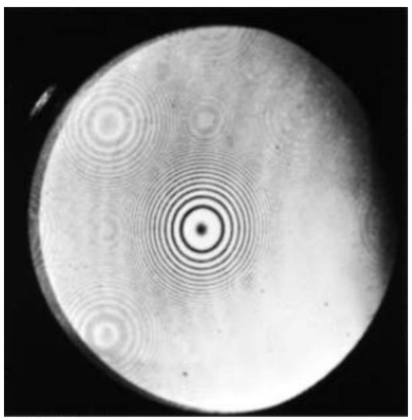
To samo tylko w przeciw fazie

Obraz dyfrakcyjny od dwóch nawzajem uzupełniających się ekranów jest taki sam

Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela

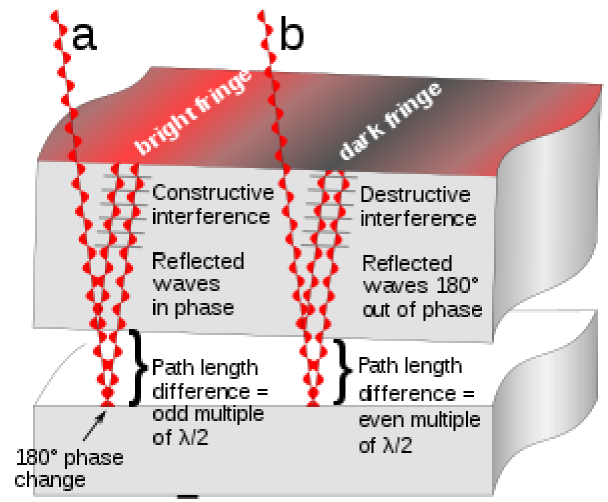
pierścienie Newtona





Czarny krążek w środku !

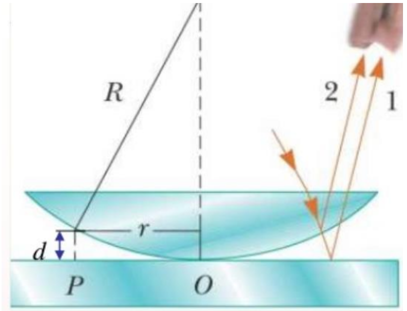
- Światło przy odbiciu zmienia swoją fazę o π/2 gdy odbija się od ośrodka o wyższym współczynniku załamania
- Przy odbiciu od ośrodka o niższym współczynniku załamania faza się nie zmienia
- Przy przejściu przez granicę między ośrodkami faza się nie zmienia

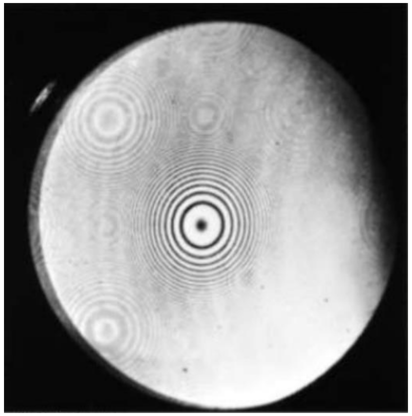


en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_rings

Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela

pierścienie Newtona

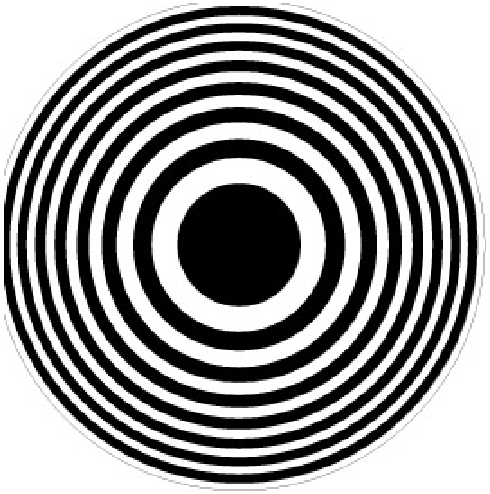


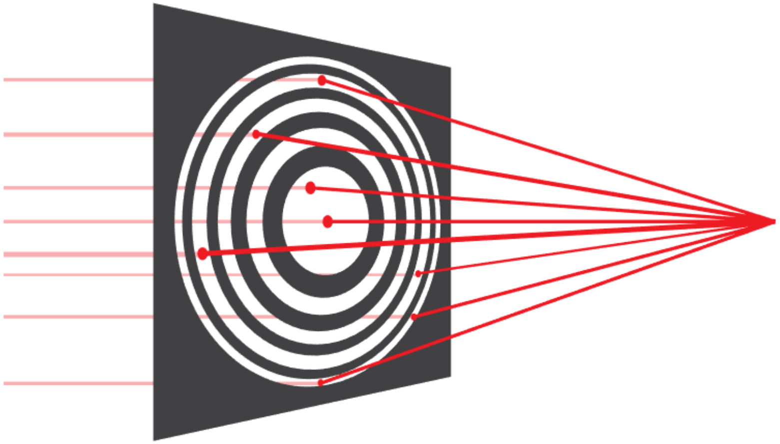


Soczewka Newtona

Obszar wewnątrz otworu (kołowy) mogę podzielić na strefy, z których droga optyczna do danego punktu ekranu różni się o wielokrotność połowy długości fali.

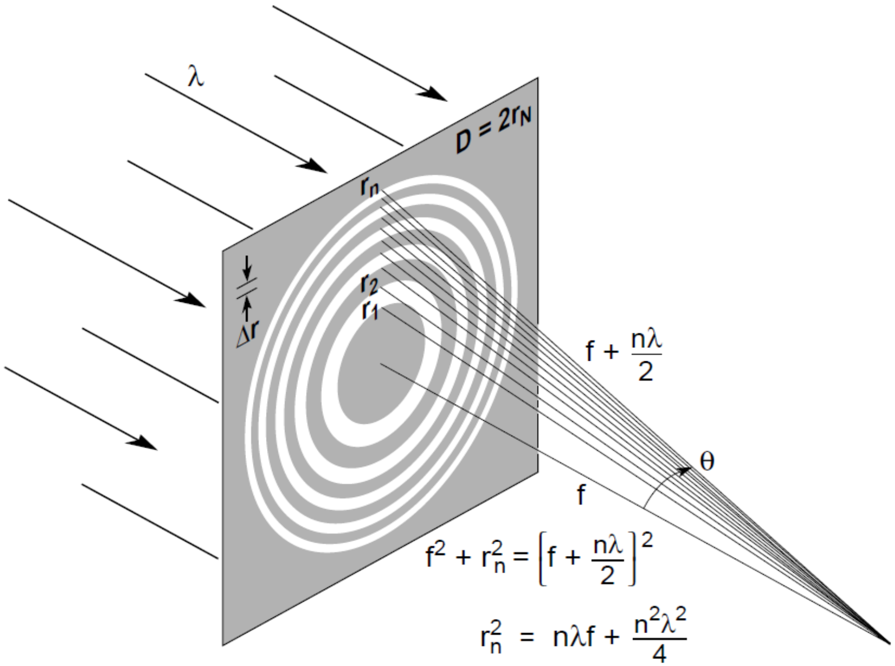
Płytka strefowa



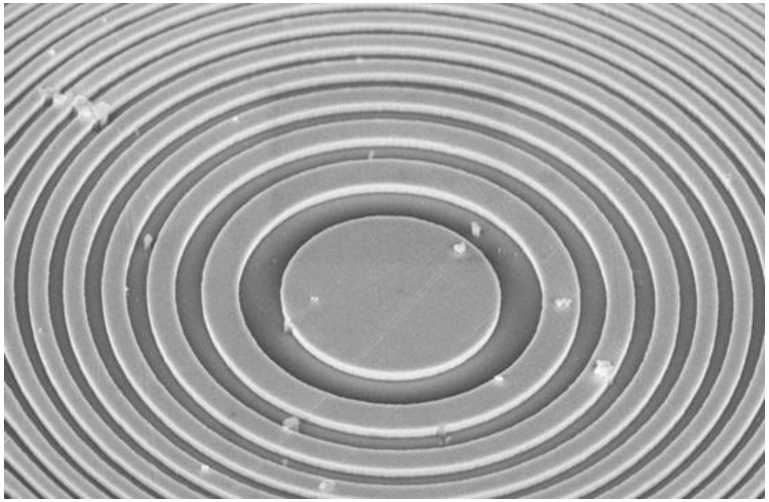


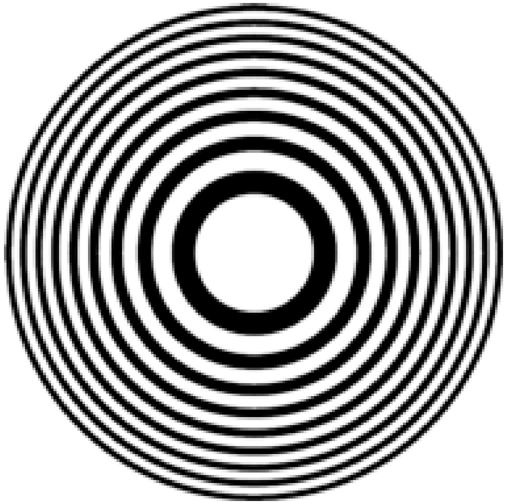
Możemy taki element traktować jak siatkę dyfrakcyjną o tak lokalnie dobranym okresie aby ugięte promienie (1 rząd ugięcia) trafiały w ognisko.

Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela



$$r_n = \sqrt{n\lambda f + \frac{n^2\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{n\lambda f}$$





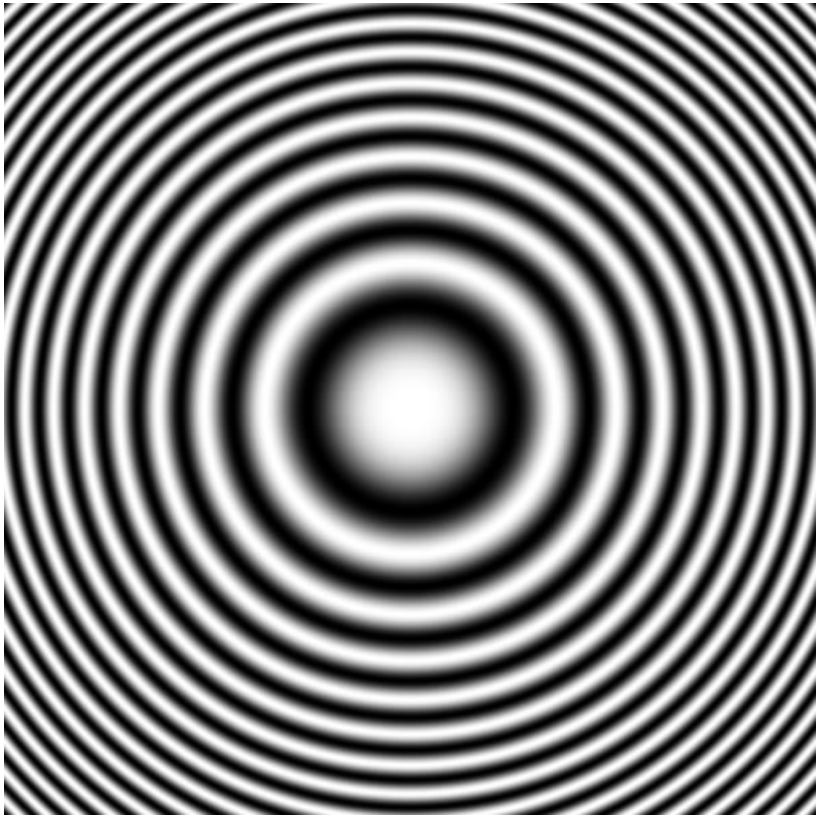
Inne warianty

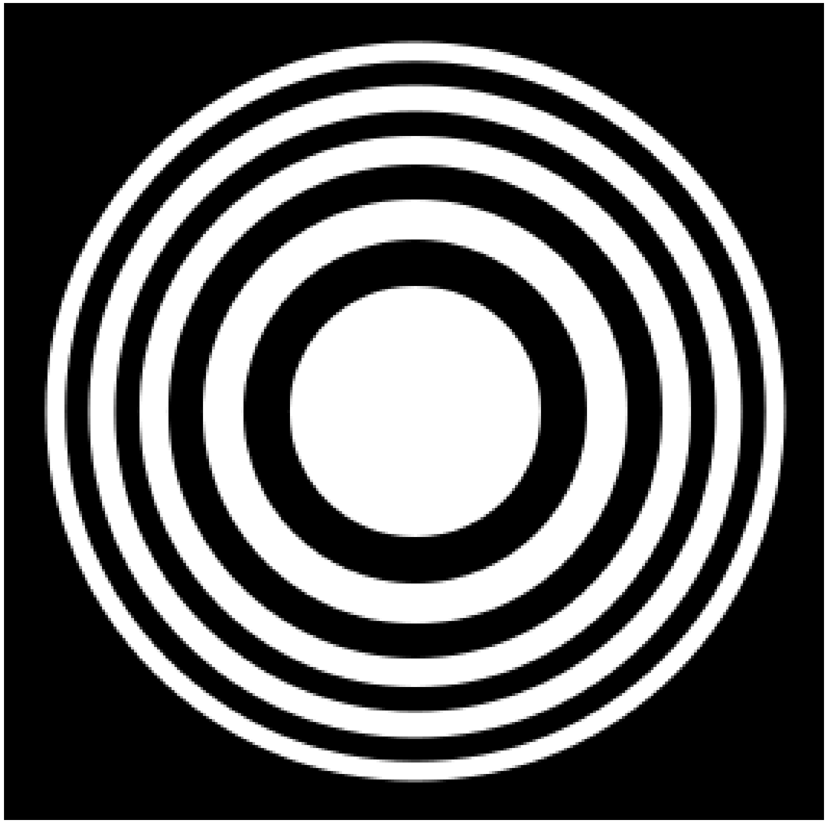
Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela

Soczewka Fresnela a płytka strefowa

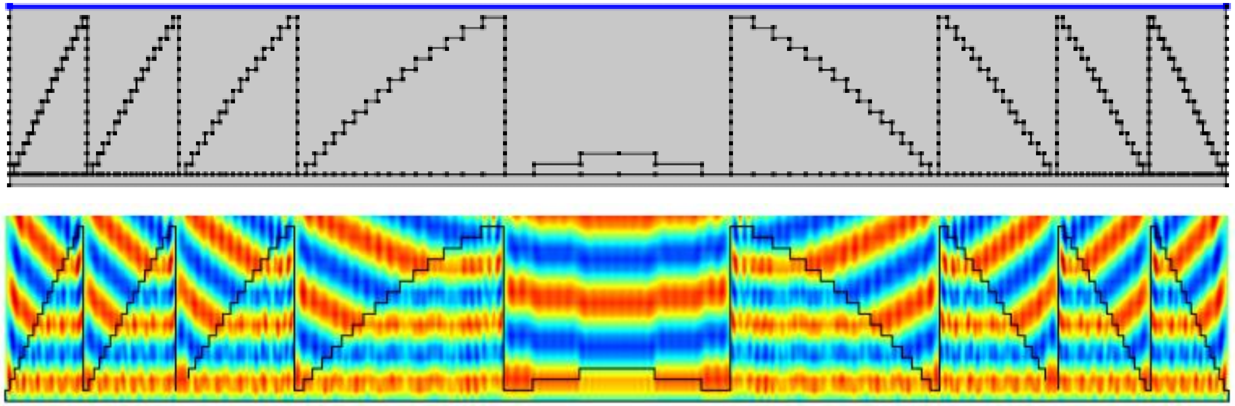
$$\frac{1 \pm cos(kr^2)}{2}$$

$$\frac{1 \pm sgn(cos(kr^2))}{2}$$

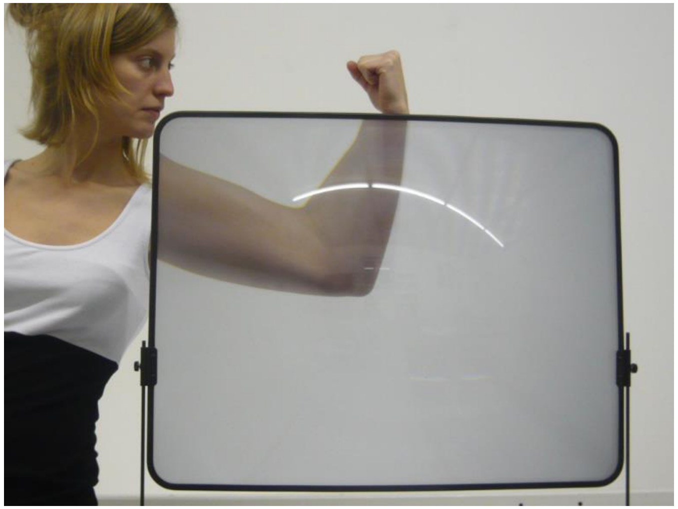




Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela



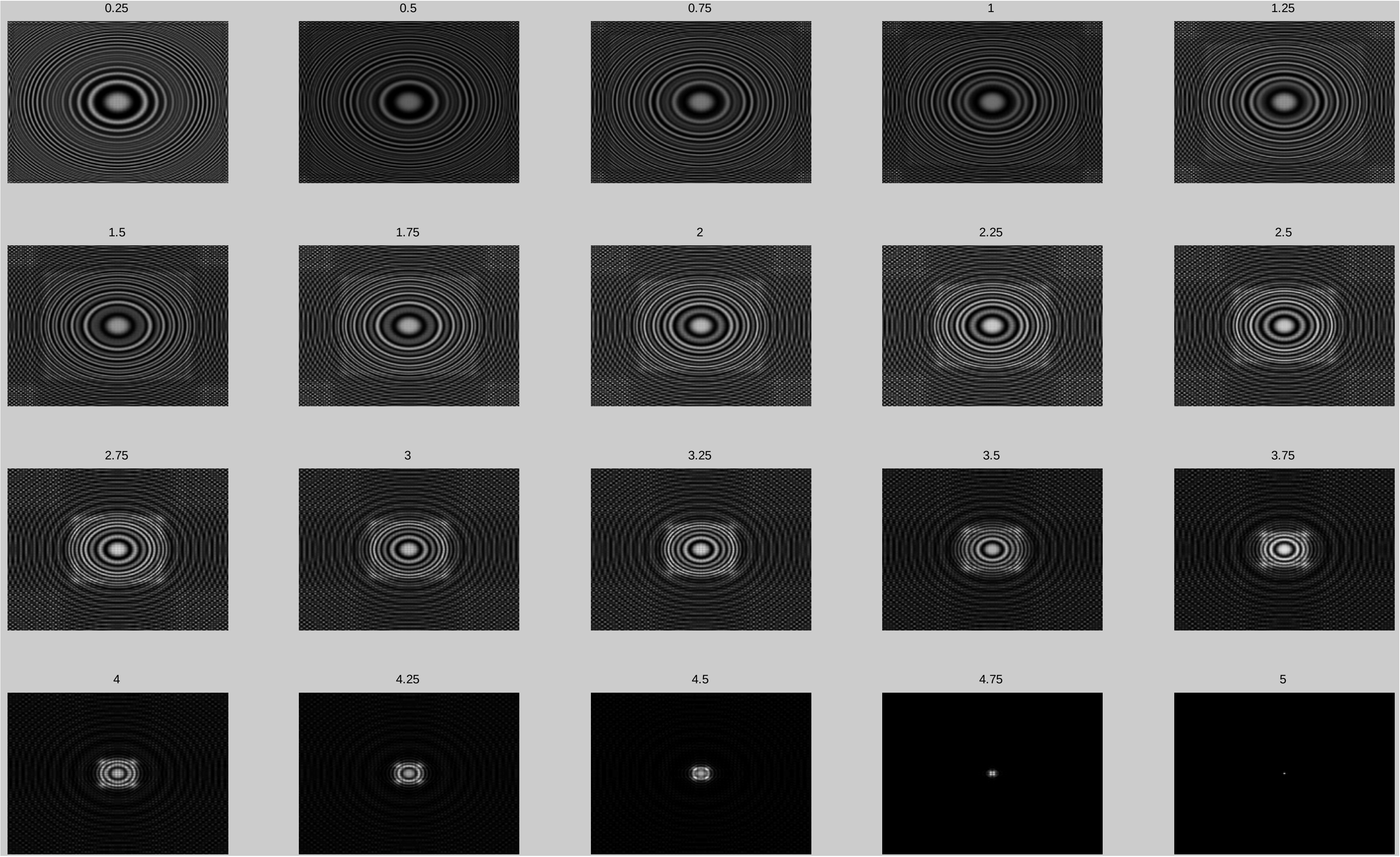
www.comsol.com/blogs/how-to-implement-the-fourier-transformation-from-computed-solutions/



Propagacja za soczewką Fouriera

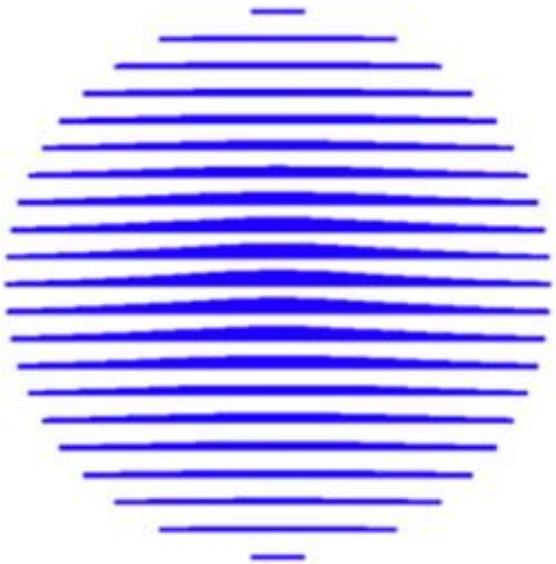
Cw 7.2.m

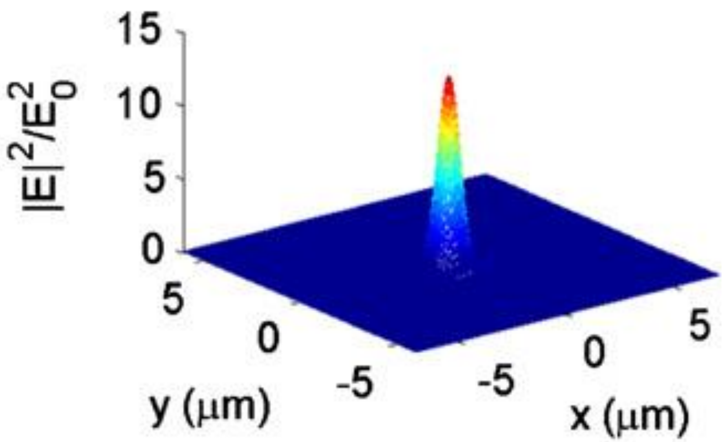
Elementy dyfrakcyjne – soczewka Fresnela



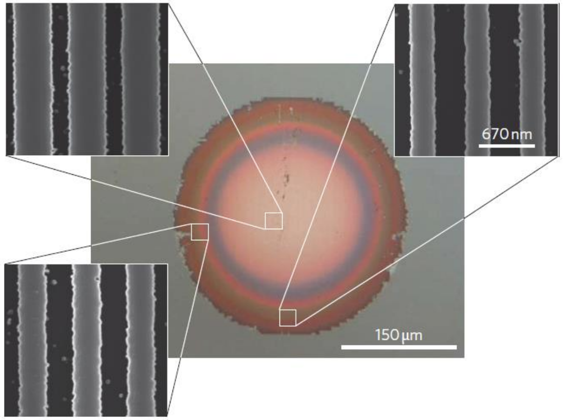
Elementy dyfrakcyjne

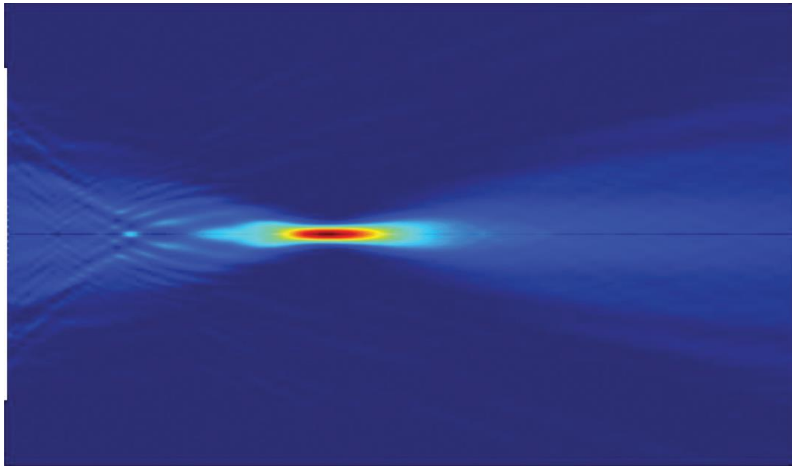
Soczewka dyfrakcyjna - zmiana okresu siatki (soczewka skupiająca)





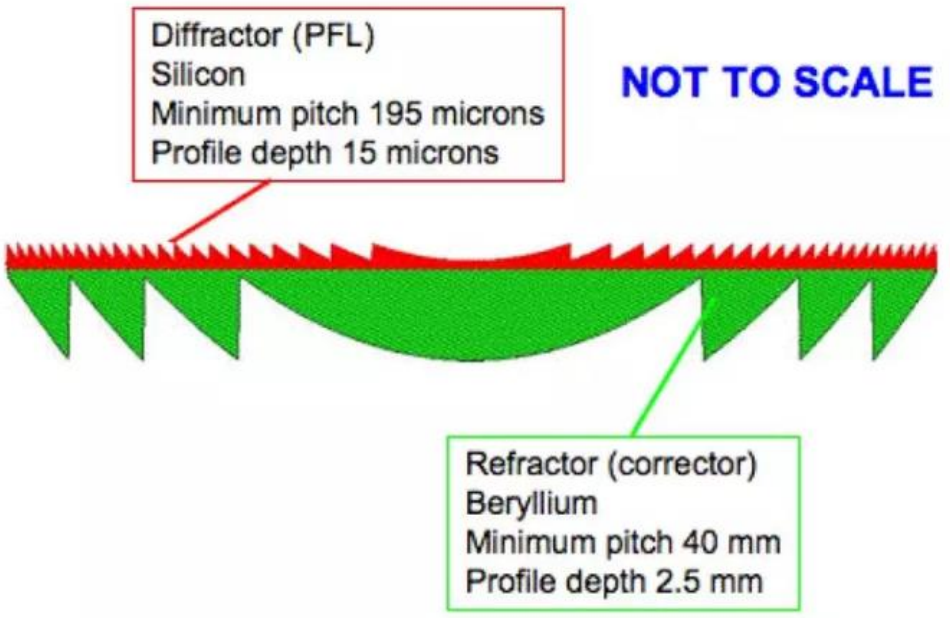
Zmieniająca się długość
i szerokość linii siatki



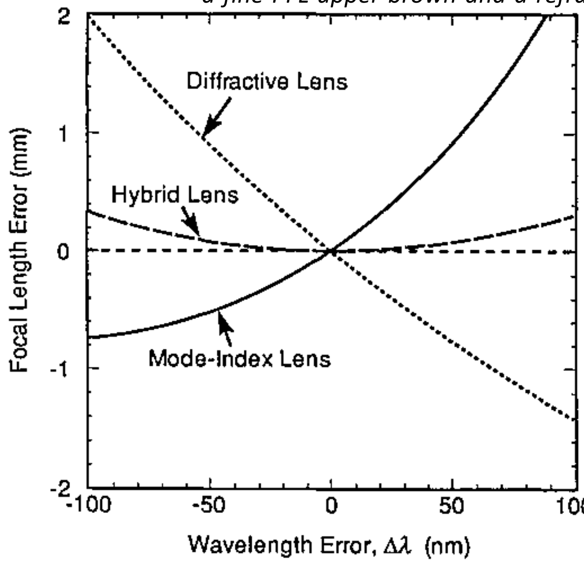


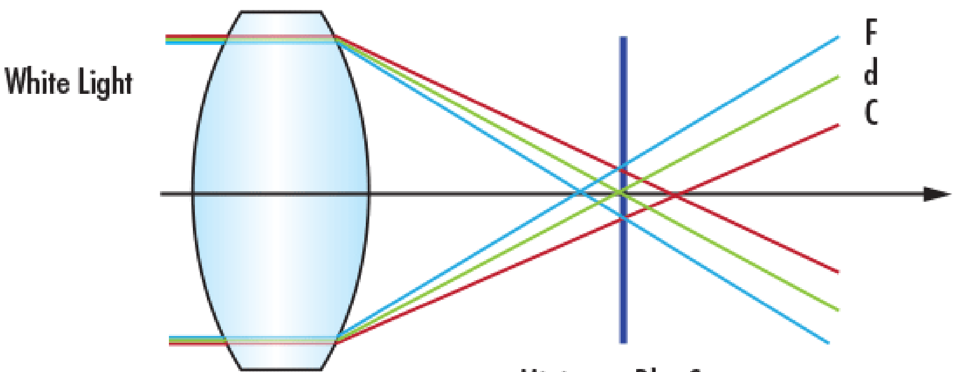
Elementy dyfrakcyjne – soczewka refrakcyjno-dyfrakcyjna

Korekcja aberracji chromatycznej

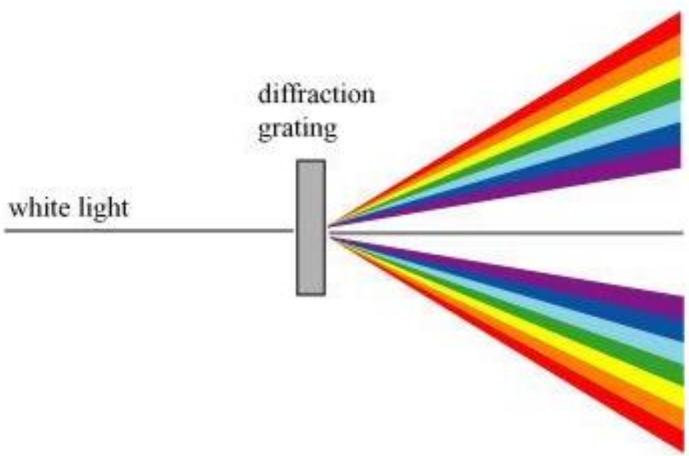


G, Skinner, at all, „A-diffractive-refractive-achromat-consists-of-a-fine-PFL-upper-brown-and-a-refractive,"





www.edmundoptics.com



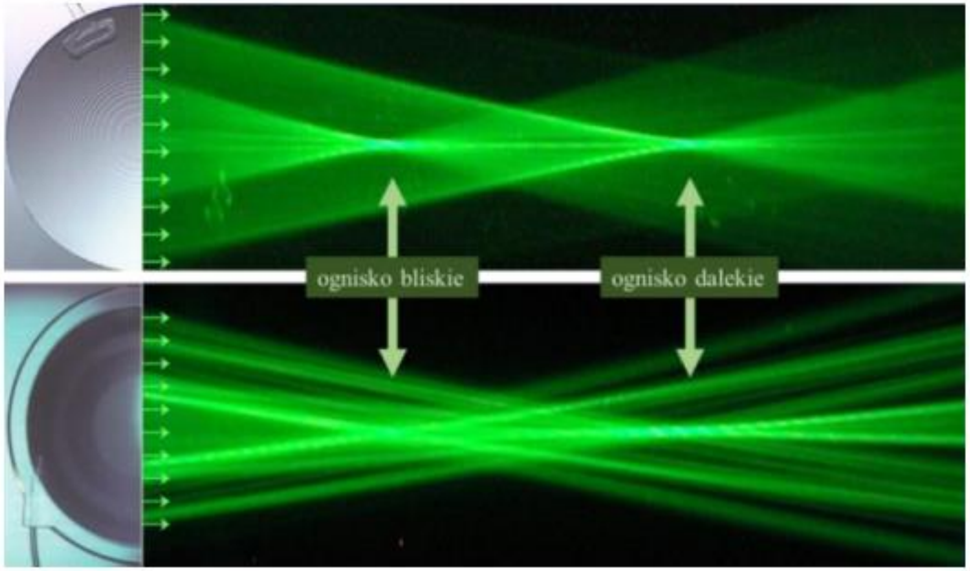
physics.stackexchange.com/questions/233925/diffraction-of-light-and-separation-of-its-colors

Elementy dyfrakcyjne – soczewka refrakcyjno-dyfrakcyjna

Soczewki wewnątrz gałkowe:

- sferyczne soczewki refrakcyjne jednoogniskowymi,
- strefowe dwuogniskowe i trójogniskowe soczewki refrakcyjne,
- dwuogniskowe soczewki hybrydowe refrakcyjno-dyfrakcyjne,
- apodyzowane hybrydowe soczewki refrakcyjne z asferycznym komponentem refrakcyjnym.

W hybrydowych soczewkach dwuogniskowych komponent refrakcyjny zapewnia ostre odwzorowanie przestrzeni przedmiotowej dalekiej, struktura dyfrakcyjna zapewnia ostre widzenie przedmiotów bliskich

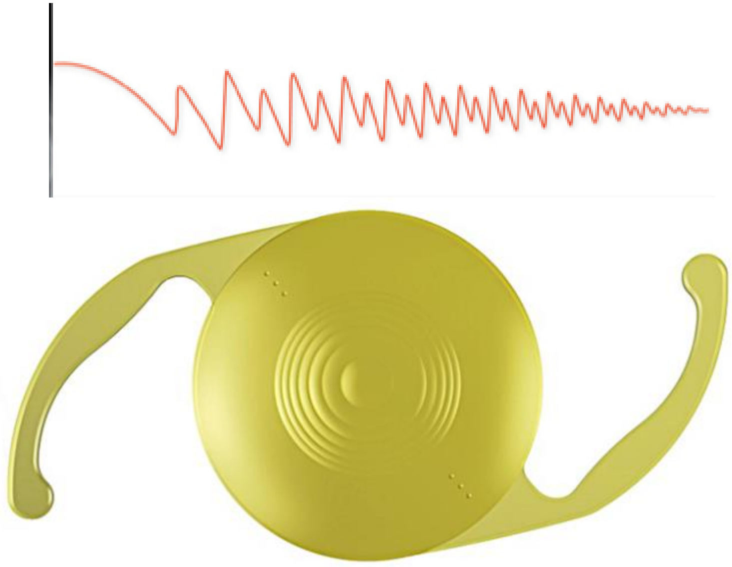


Rozprawa doktorska Macieja Sokołowskiego

Elementy dyfrakcyjne – soczewka refrakcyjno-dyfrakcyjna

Apodyzacja - zmniejszającą się od centrum do peryferii soczewki wysokość pierścieni dyfrakcyjnych

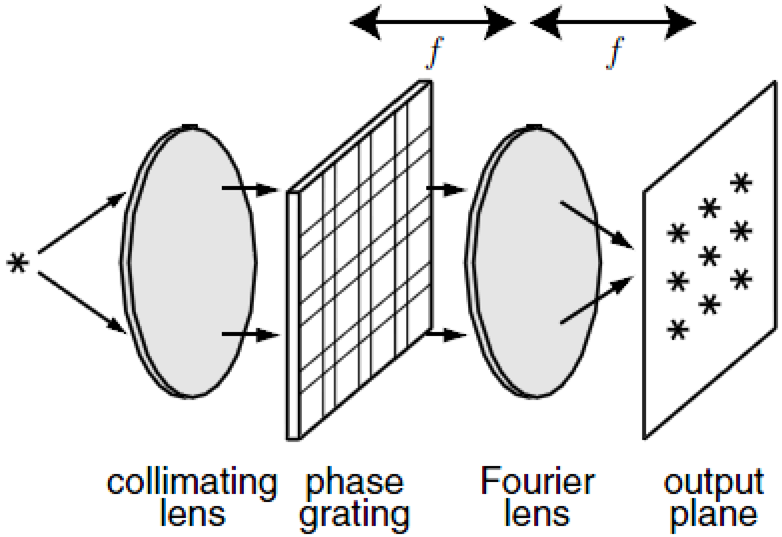
Dystrybucja światła do bliży, odległości pośrednich i dali, jest uzależniona od rozmiaru źrenicy.
Podczas dobrych warunków oświetleniowych wzmacniane jest widzenie bliskie i pośrednie podczas gdy w warunkach słabego oświetlenia, kiedy źrenica jest rozszerzona, więcej energii lokowane jest do widzenia dalekiego.

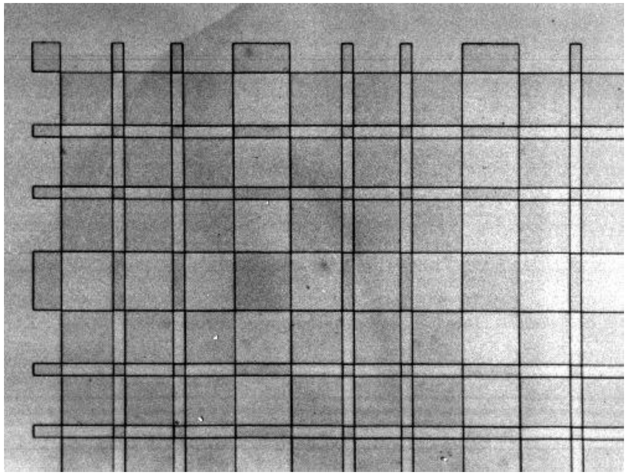


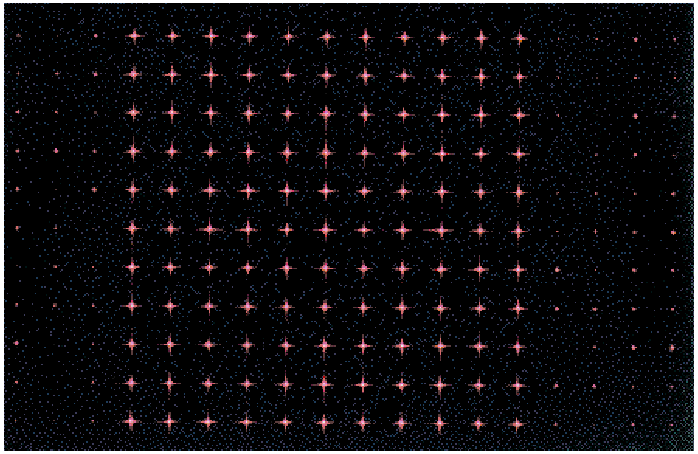
www.cxnews.pl/pierwsza-soczewka-trzyogniskowa-do-widzenia-bliskiego-posredniego-i-dalekiego,509.html

Elementy dyfrakcyjne – siatki Dammana

Podział wiązki (beam shaping)



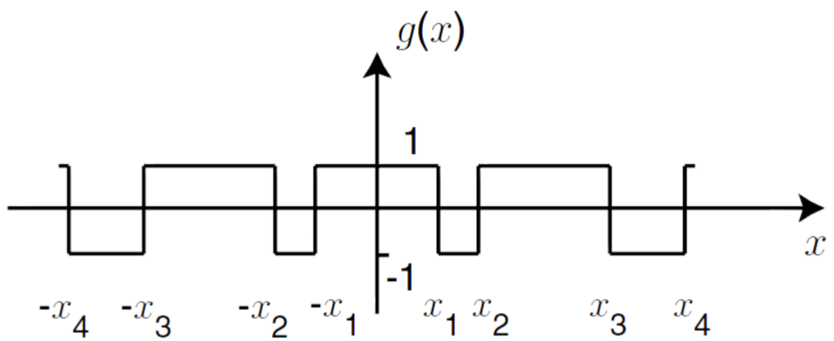




Elementy dyfrakcyjne – siatki Dammana

Założenia:

- struktura siatki fazowej: symetryczna i powielana
- macierz punktów symetryczna
- macierz punktów periodyczna
- separacja wzdłuż osi X i Y



$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \, rect\left(\frac{x - \frac{x_{n+1} + x_n}{2}}{x_{n+1} + x_n} \right) \qquad 0 \leq x \leq 0.5$$

gdzie: x_n $(n = 1, \dots, N)$ oznaczają punkty zmiany transmitancji siatki

Jak znaleźć x_m ? NIE ISTNIEJE ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE !

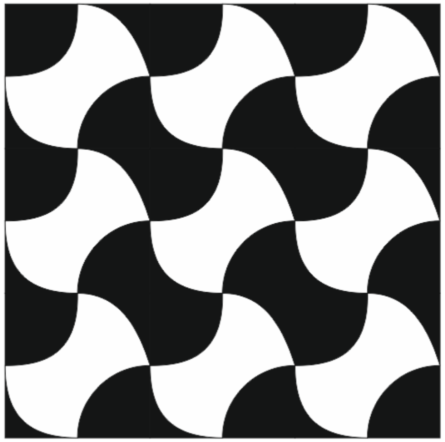
Elementy dyfrakcyjne – siatki Dammana

Znajdowanie x_m - metody iteracyjne:

- Gradientowe,
- Symulowane wyżarzanie,
- Algorytmy genetyczne,
- IFTA.

Uogólnienia siatek Dammana (pozwalają na dowolne rozmieszczenie punktów):

Periodyczność zadanego kształtu



siatki szaroodcieniowe