

1100-4BW12, rok akademicki 2018/19

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Hologramy generowane komputerowo - CGH

Widmo obrazu:

$$G(v_x, v_y) = FT \{ g(x, y) \}$$

mające być zapisane na hologramie, dyskretyzujemy (próbujemy):

$$G(v_x, v_y) = \sum_n \sum_m G(n\Delta v_x, m\Delta v_y) \delta(v_x - n\Delta v_x, v_y - m\Delta v_y)$$

gdzie: $\Delta v_x, \Delta v_y$ odstępy między punktami próbkowania.

$$G_{nm} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplituda}}}{A_{nm}} \exp(-i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faza}}}{\phi_{nm}})$$

Hologramy generowane komputerowo - CGH

Metoda Lohmana:

Każdej próbce: $G_{nm} = G(n\Delta v_x, m\Delta v_y)$

odpowiada jedna komórka dyskretyzacji

o środku w punkcie $v_{nx} = n\Delta v_x, v_{my} = m\Delta v_y$

Faza i amplituda kodowane są jako prostokątna apertura w nieprzezroczystym tle.

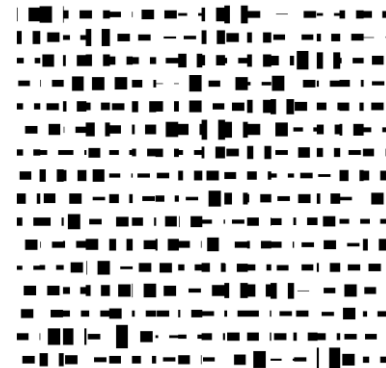
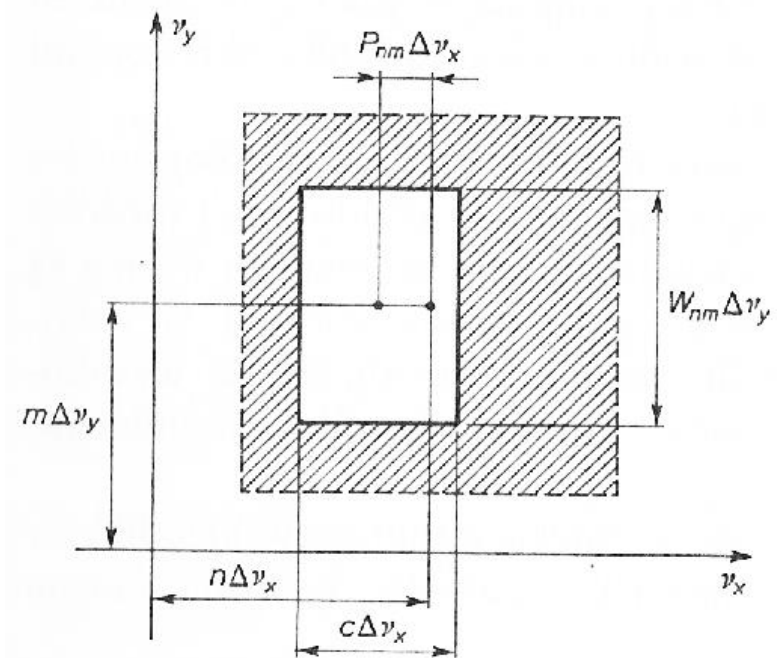
Szerokość apertur $c\Delta v_x$ jest taka sama.

Wysokość apertury $W_{nm}\Delta v_y$ jest proporcjonalna do wartości amplitudy A_{nm}

Przesunięcie $P_{nm}\Delta v_x$ koduje fazę φ_{nm}

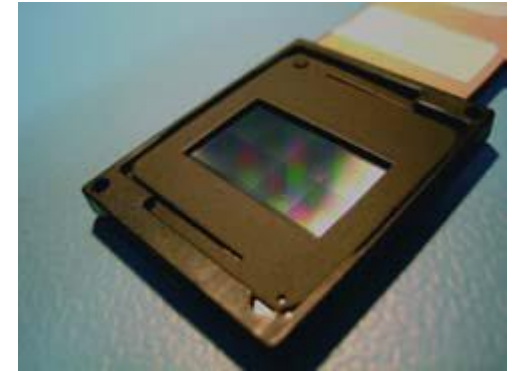
Spełnione musi być: $W_{nm} \leq 1, |P_{nm}| + \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2}$

Komórka dyskretyzacji



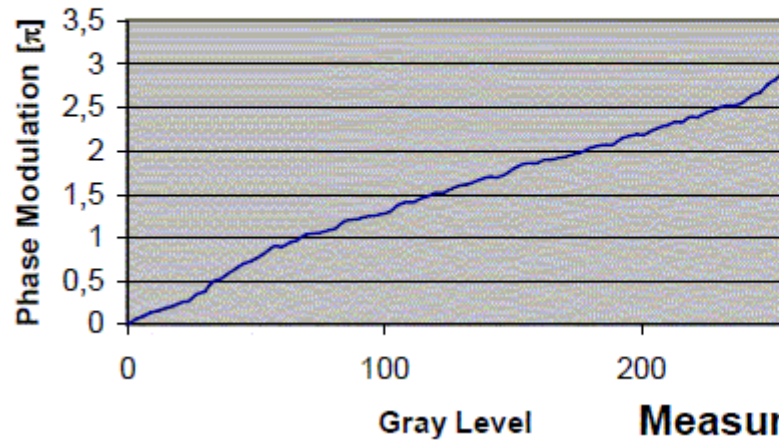
Holografia

Hologramy generowane komputerowo - CGH

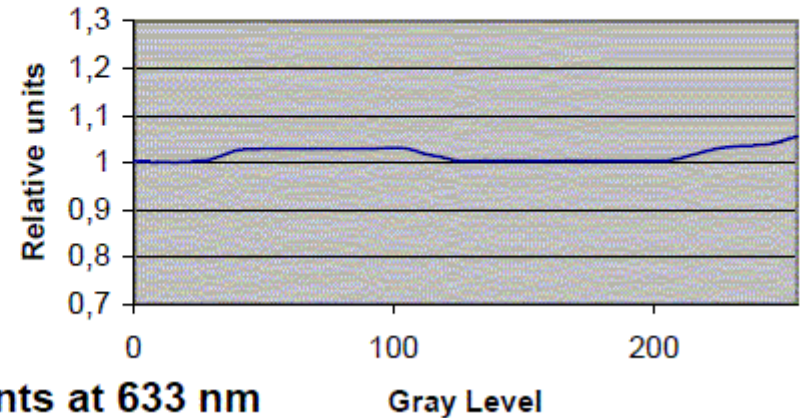


Phase- and intensity modulation

Polariser 90°



Intensity Modulation
Polariser 90° Analyser 90°



Measurements at 633 nm

Gray Level

Kodowanie amplitudy i fazy

Stosowane podejścia:

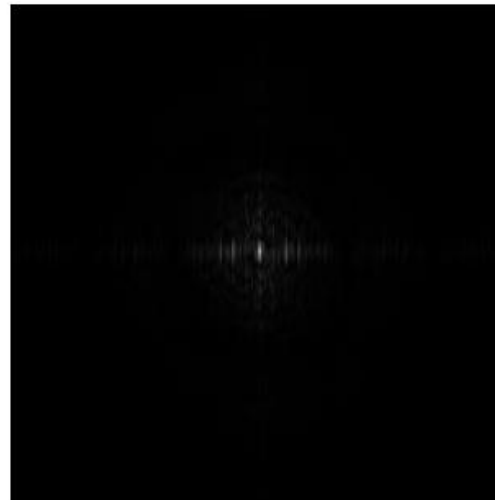
- metoda montecarlo
- Gerchberg-Saxton
- **IFTA**
- algorytmy genetyczne
- wyżarzanie

Pozwalają na optymalizację kodowania przy ograniczonej dziedzinie dostępnych parametrów:

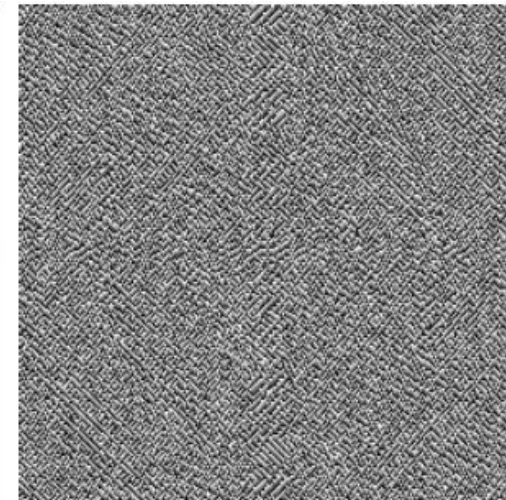
- amplituda
- faza
- amplituda-faza
- głębia
- długość fali
- DOE, HOE, CGH



obraz



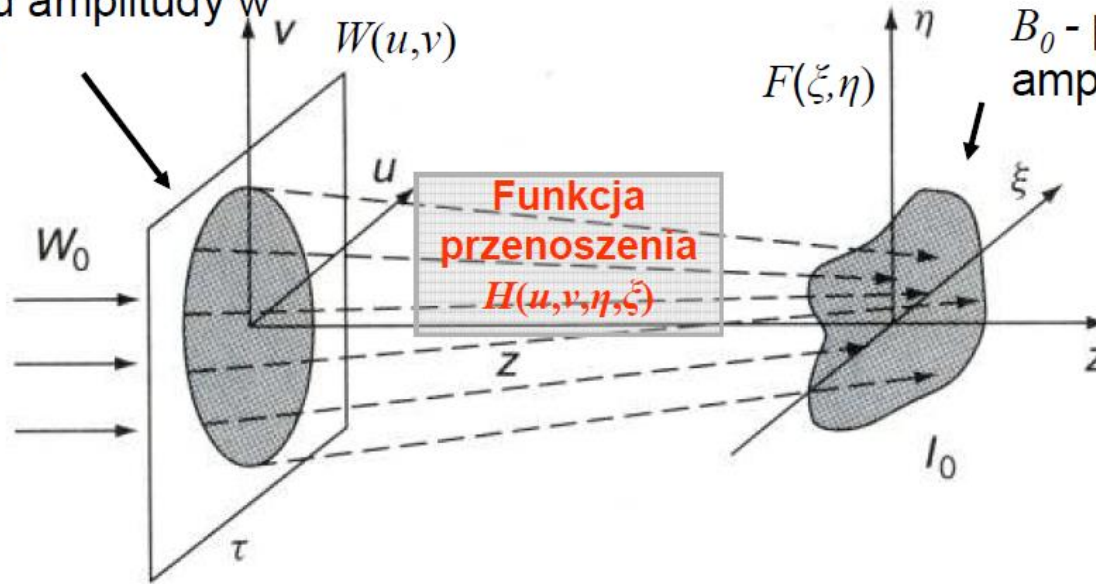
amplituda



faza

Holografia

A_0 – rozkład amplitudy w hologramie



B_0 – pożądany rozkład amplitudy rekonstrukcji

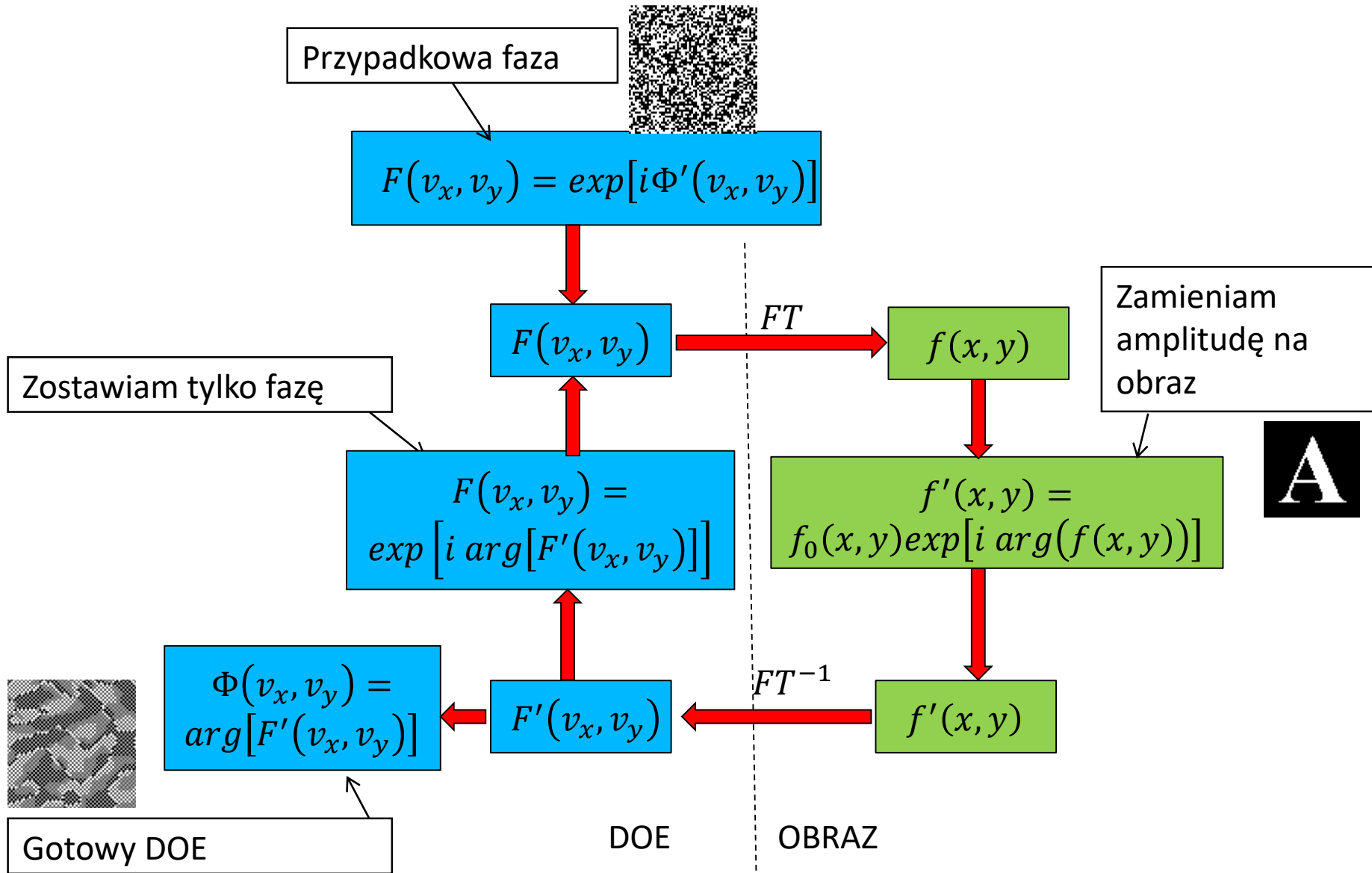
Propagacja w wolnej przestrzeni (Fresnela) z płaszczyzny hologramu do płaszczyzny rekonstrukcji (odległość z):

$$F(v_x, v_y) = \iint A(x, y) H(x - v_x, y - v_y) dx dy$$

Funkcja przenoszenia (na odległość z):

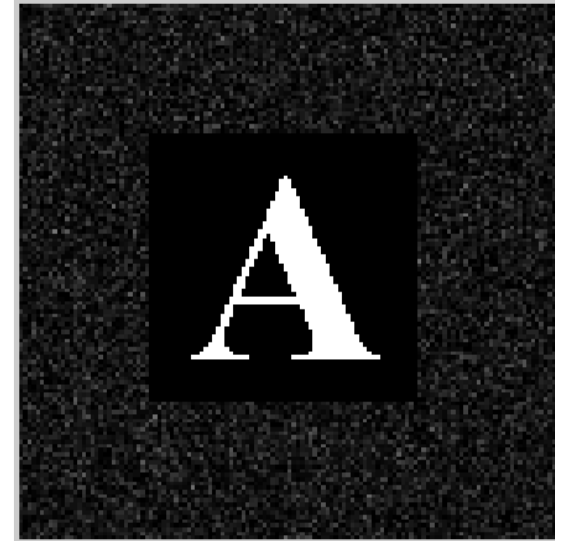
$$H(x, y) = \frac{ik \exp(ikz)}{2\pi z} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right]$$

Kodowanie amplitudy i fazy – IFTA (Iterative Fourier transform algorithm)

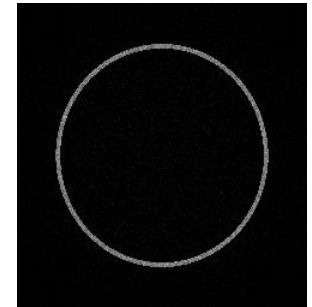
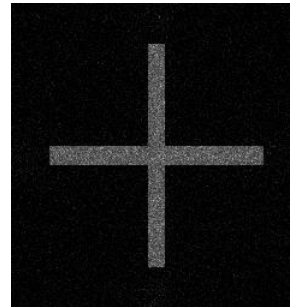
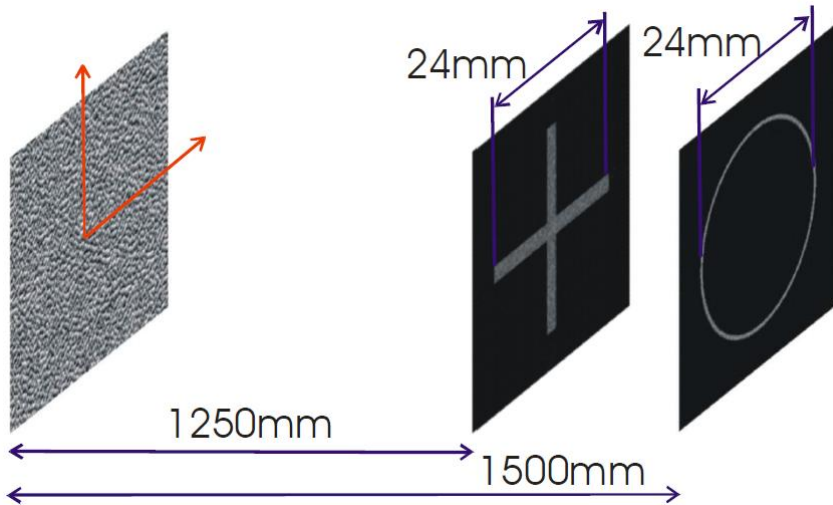


Holografia

Często optymalizacji (nadpisanie amplitudy) dokonuje się w obrębie ograniczonego obszaru.
Poza nim mogą kumulować się błędy.



Przykład możliwości – dwa obrazy w różnych planach:



Holografia

Liczba poziomów:

2 3 4 5

8 16 32 64

128 256 512 1024



Holografia

Łamanie hologramu:

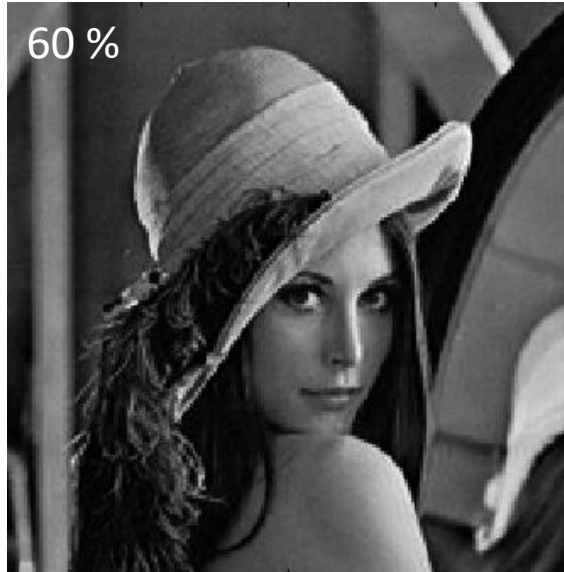
oryginał



pełny



60 %

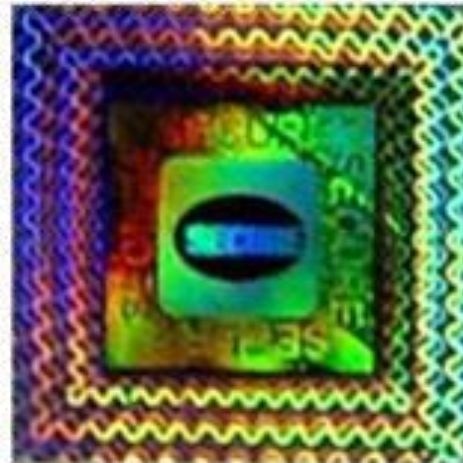


25 %



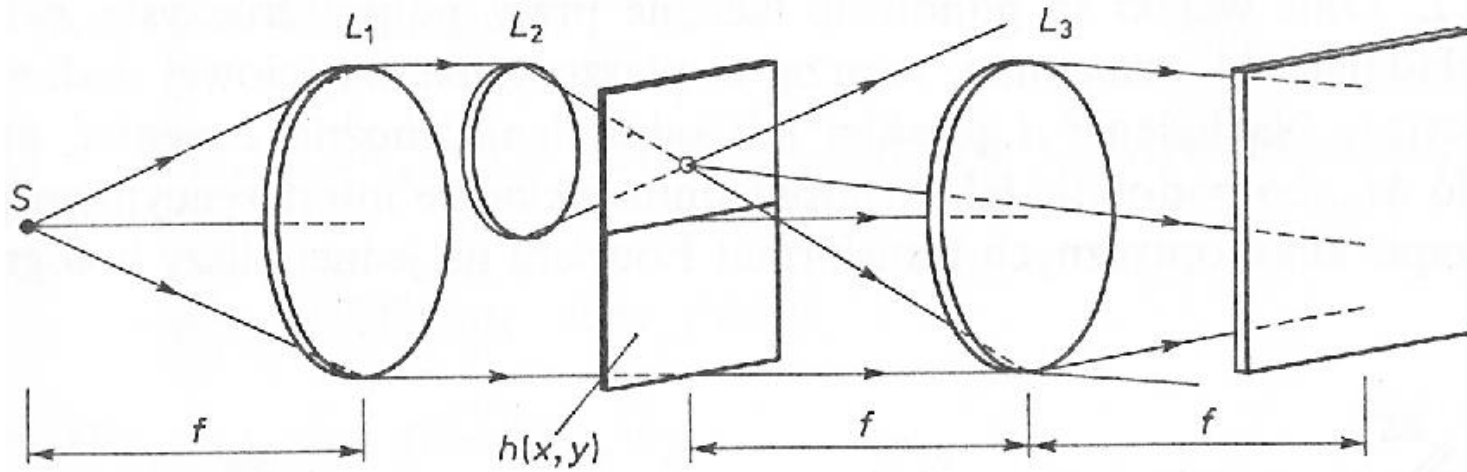
Zastosowania w życiu codziennym

- środki zabezpieczające, bardzo trudne do podrobienia;
- gwarancja oryginalności produktu (np. płyty CD);
- materiały reklamowe – atrakcja i przyciągnięcie uwagi klienta;
- rejestracja kompozycji artystycznych i niedostępnych dla zwiedzających muzea dzieł sztuki
- szyfrowanie informacji

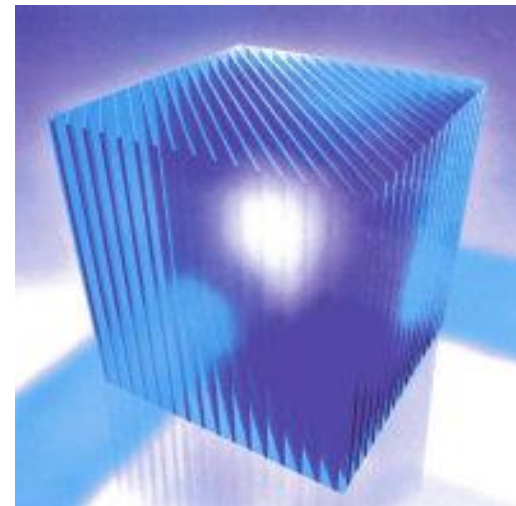


Holografia

Pamięci holograficzne

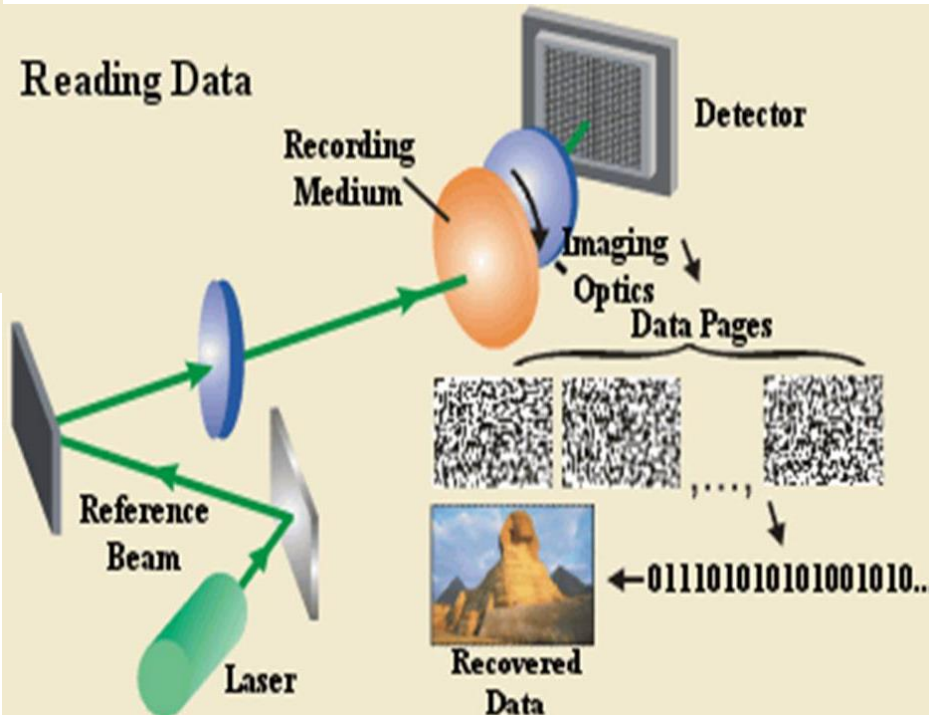
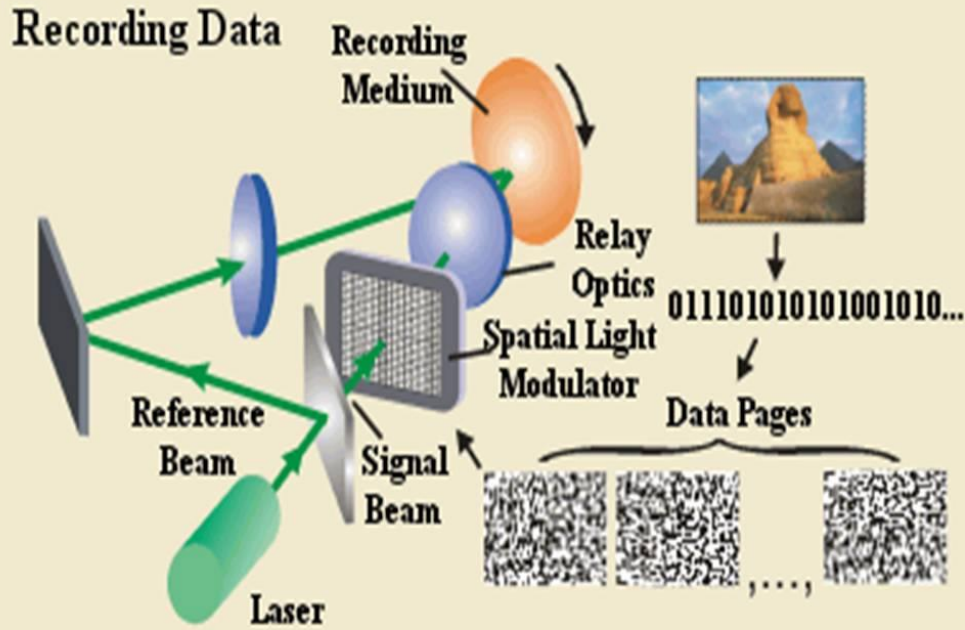


Pamięć skojarzeniowa – wystarczy niepełna informacja do odtworzenia zapisanych danych



Holografia

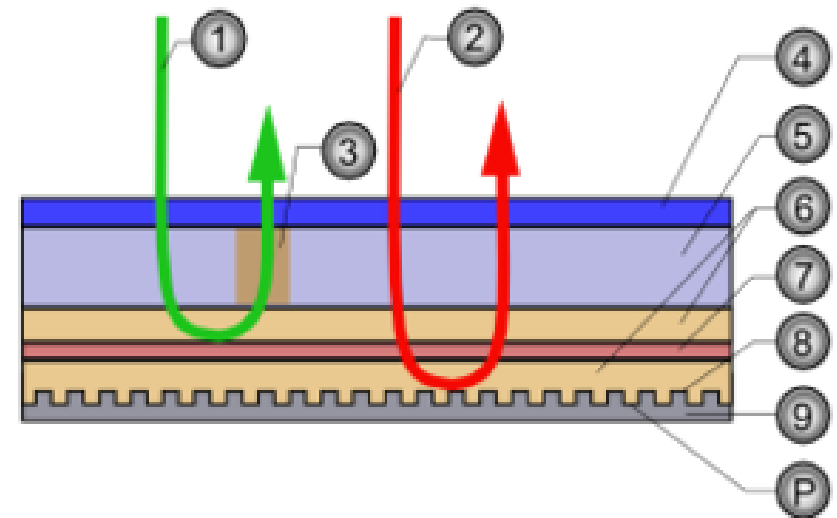
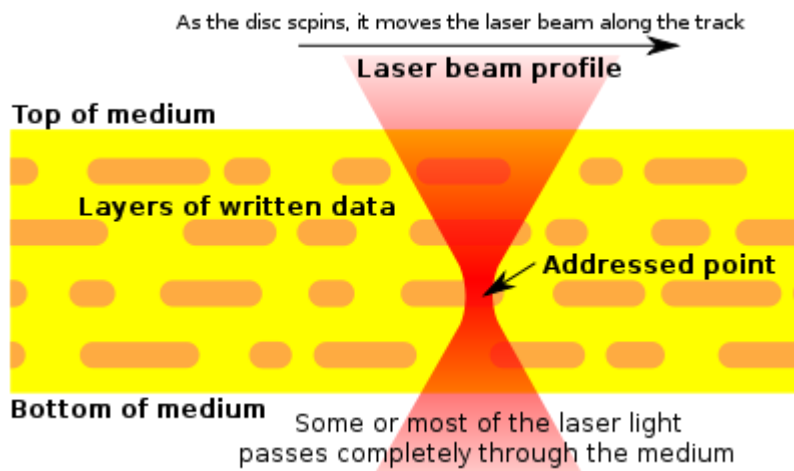
Pamięci holograficzne



Uniwersalny dysk holograficzny - Holographic Versatile Disc (6 TB)

Struktura płyty HVD

1. Zielony laser zapisu/odczytu (532nm)
2. Czerwony laser pozycjonujący/adresujący (650nm)
3. Hologram niosący informację
4. Warstwa poliwęglanowa
5. Warstwa fotopolimerowa (z danymi)
6. Warstwy dystansujące
7. Warstwa dichroiczna
8. Aluminiowa warstwa odbijająca
9. Podłoże przezroczyste
- P. PIT - wgłębienia



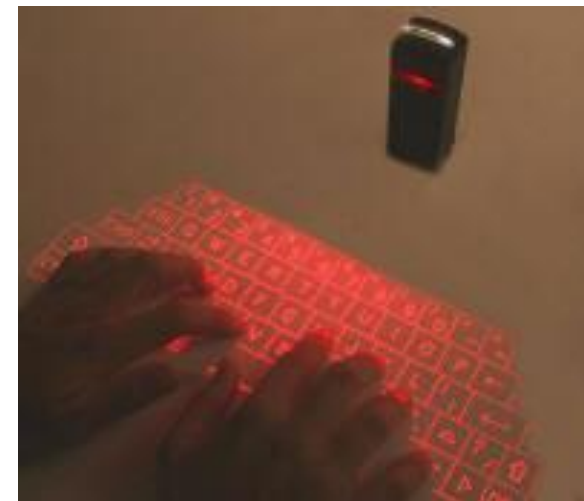
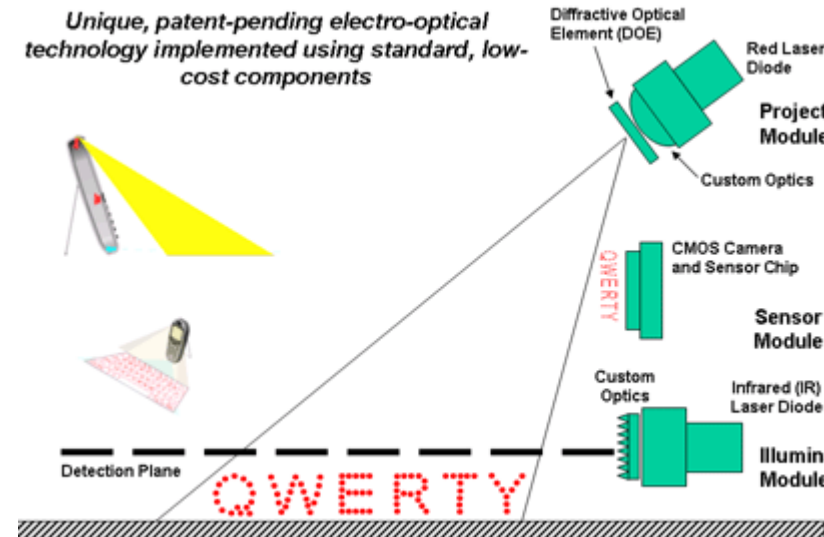
Holografia

optyczne elementy holograficzne (HOE)

Elementy optyczne typu:

- Soczewka
- Pryzmat
- Zwierciadło
- Dzielnik wiązki
- Siatka

Wykonane metodami holograficznymi.



Holografia

Hologramy obrazowe



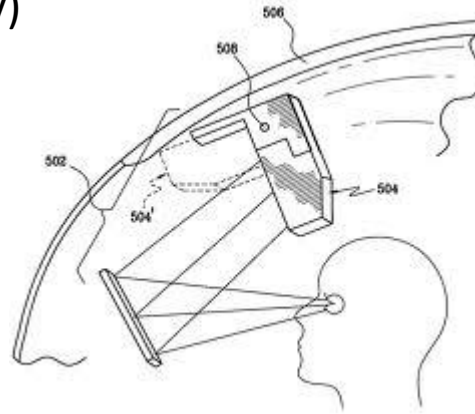
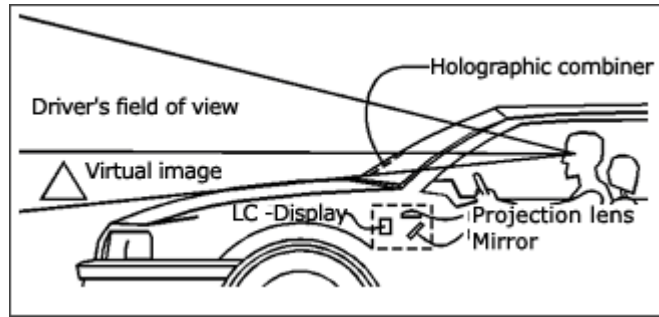
Holografia

zscape



Holografia

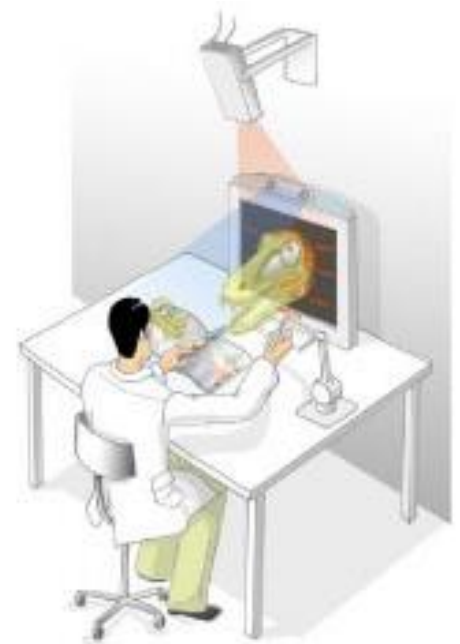
Wyświetlacze HUD (Head-Up Display)



Ta sama zasada

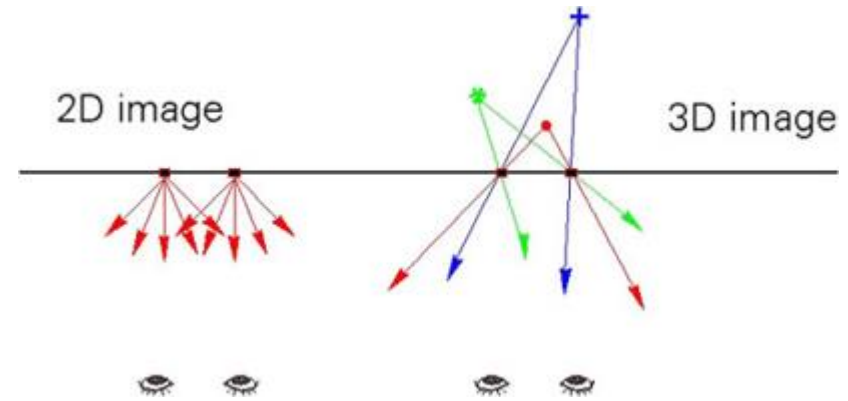
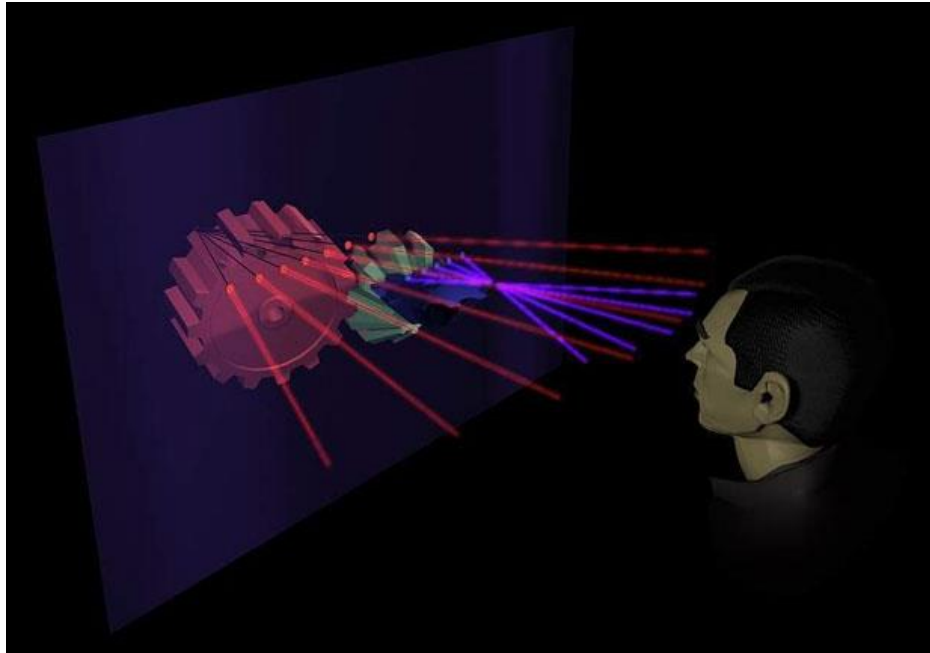


Wyświetlacze holograficzne

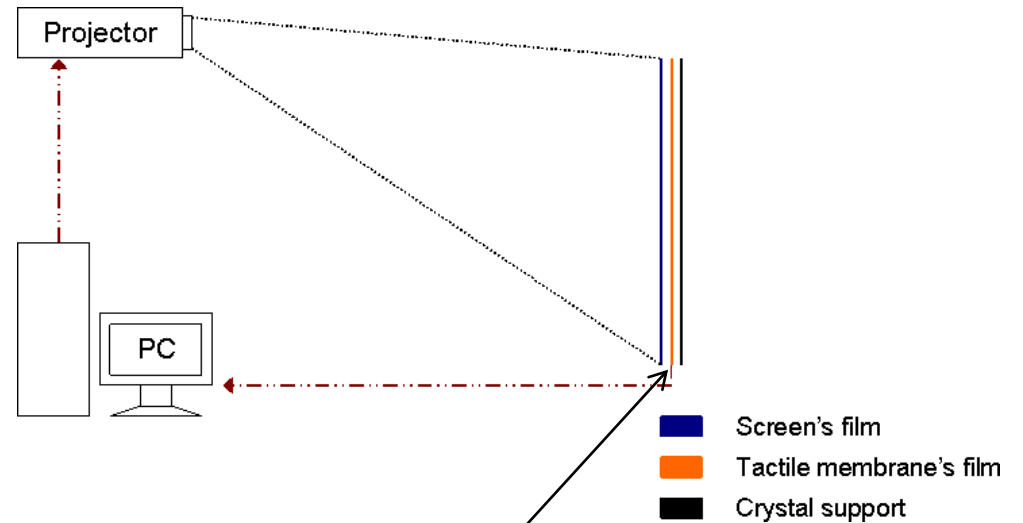


Holografia

holovizio



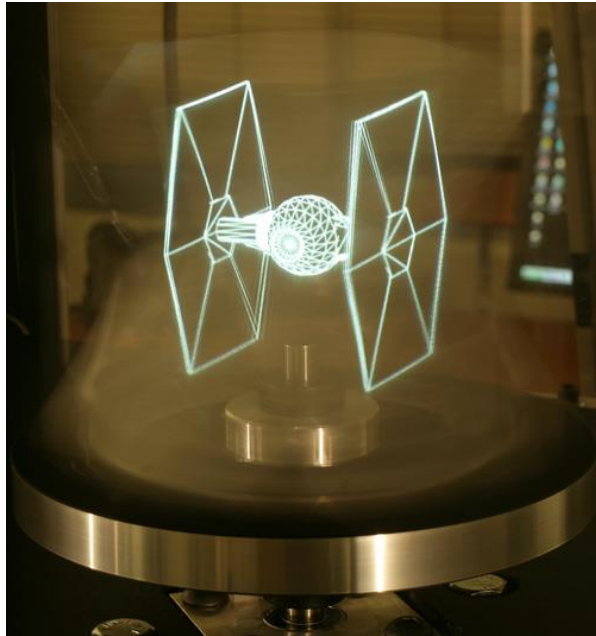
Holografia



Mikrosoczewki

Zapewniają ograniczone wrażenie głębi

Obracający się rozpraszacz

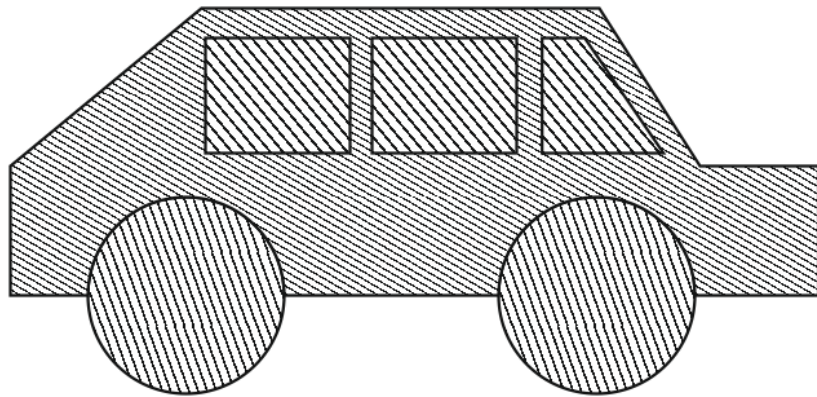


spinning mirror - "holographic diffuser"

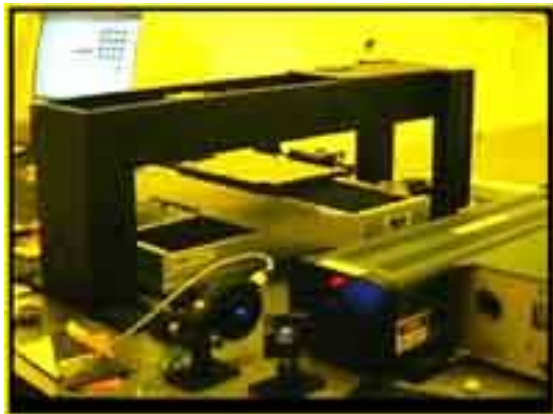
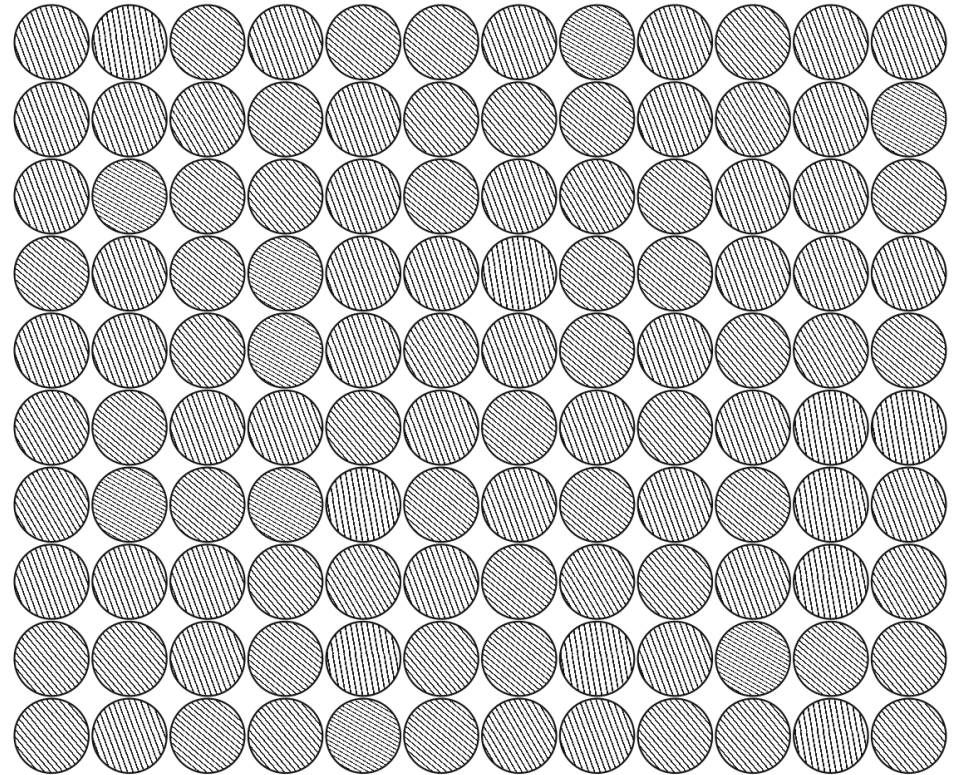


Drukarki holograficzne

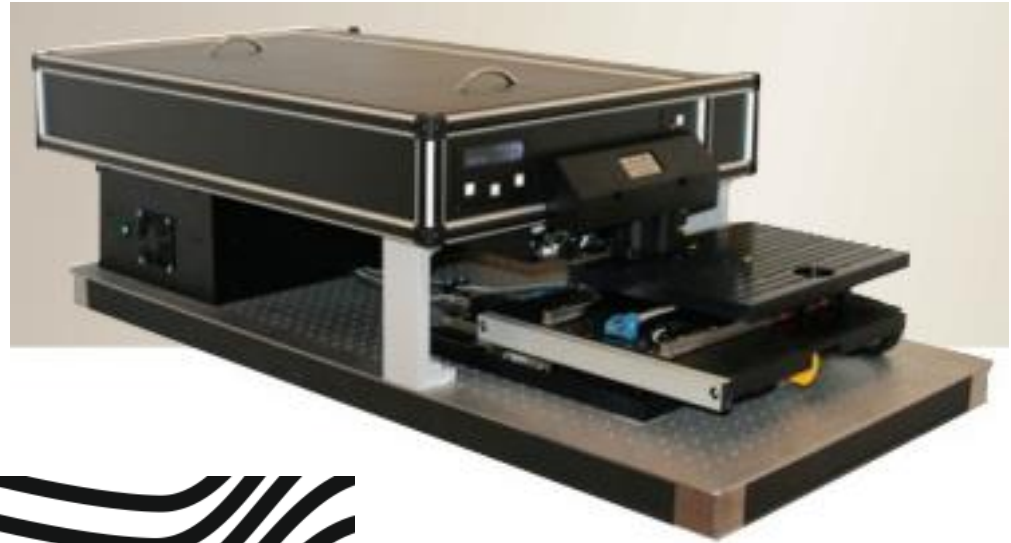
Siatki dyfrakcyjne



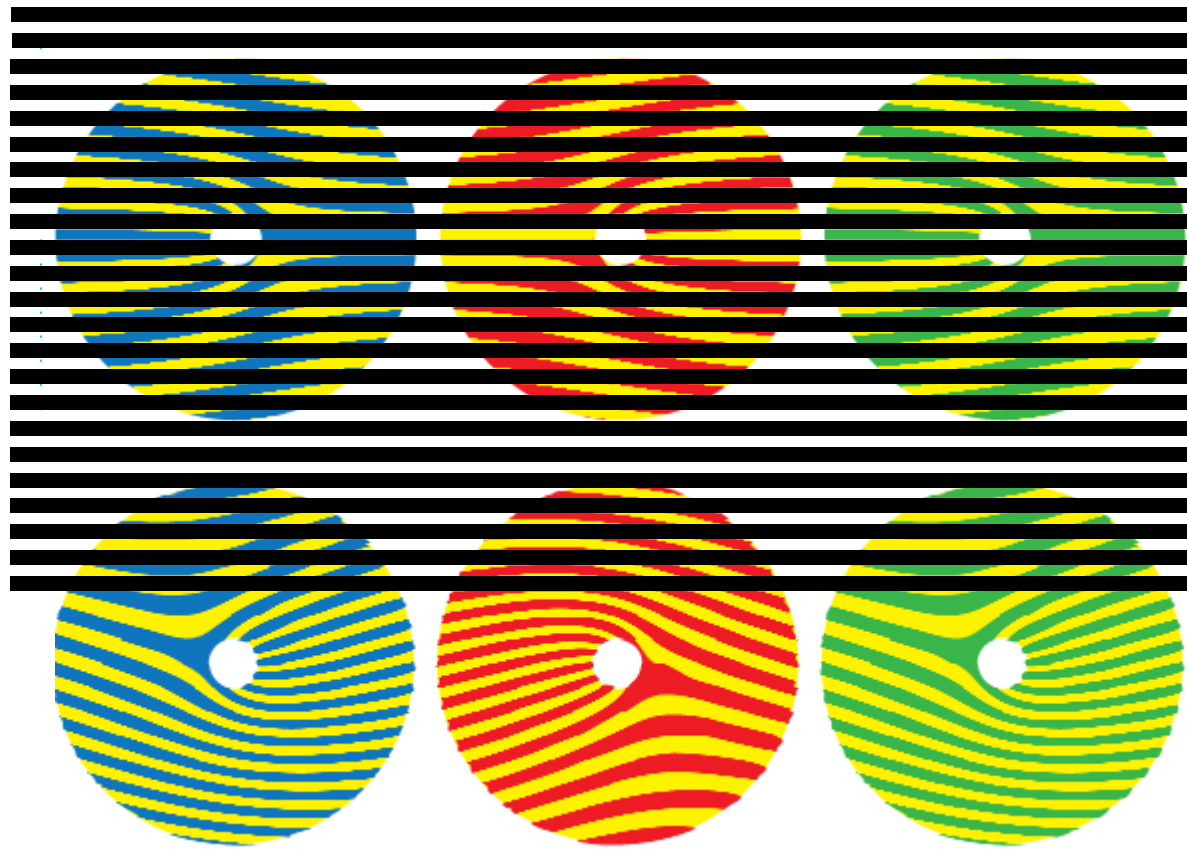
Dot-matrix hologram



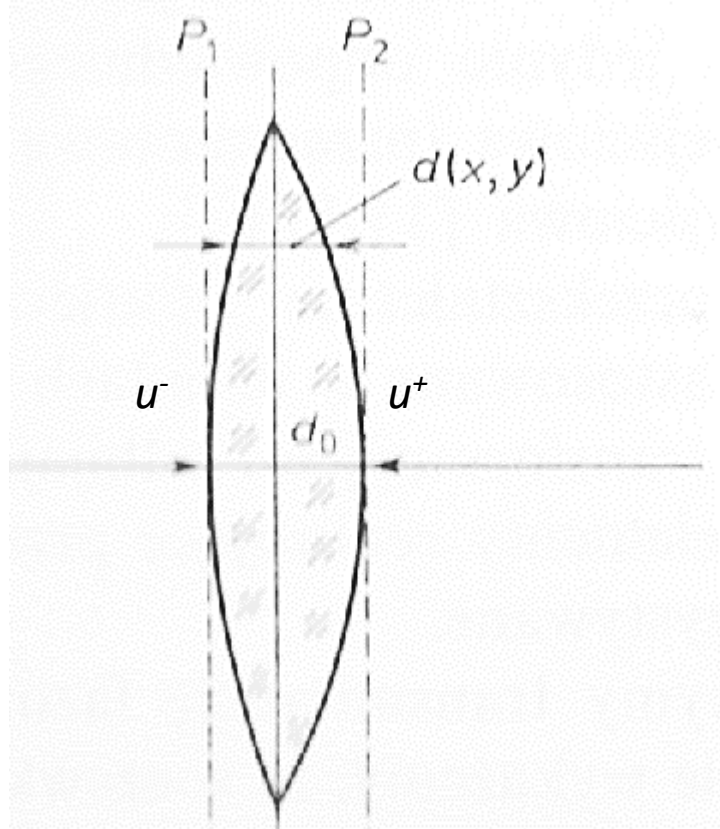
Kinemax (Polskie Systemy Holograficzne)



Kinegrams



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej



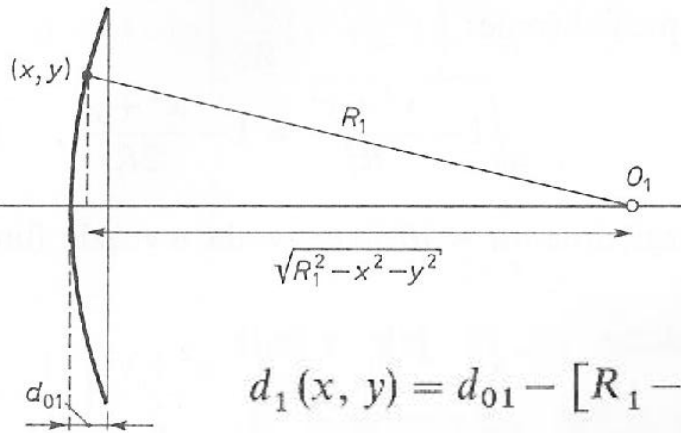
$$u^+(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)] u^-(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = knd(x, y) + k[d_0 - d(x, y)]$$

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

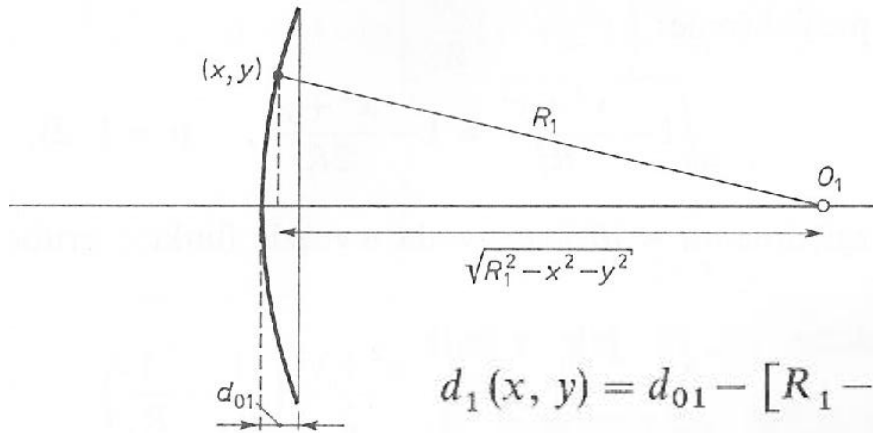
$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



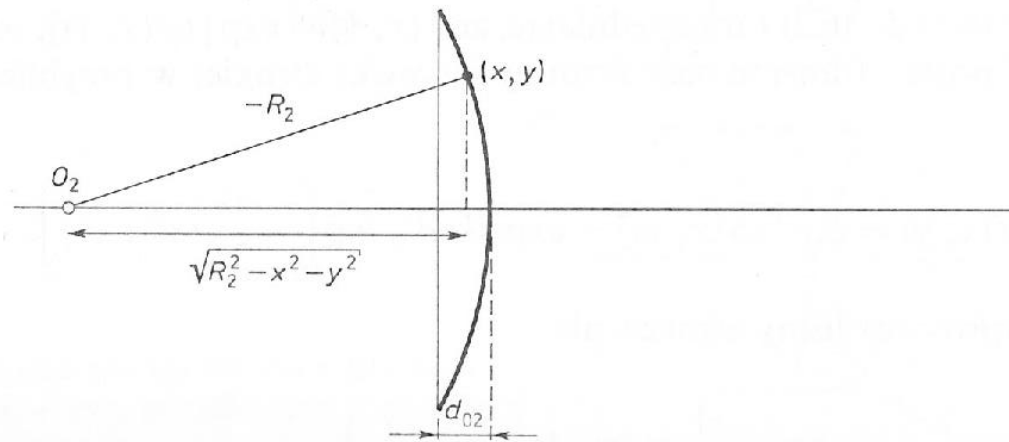
$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y),$$



$$d_1(x, y) = d_{01} - [R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - R_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right]$$



$$d_2(x, y) = d_{02} - [-R_2 - \sqrt{R_2^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{02} + R_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right]$$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Dodajemy:

$$d(x, y) = d_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right).$$

Stosując przybliżenie przyosiowe:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_i^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_i^2}, \quad (i = 1, 2),$$

Dostajemy:

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Soczewka zmienia fazę fali świetlnej: $t(x, y) = \exp [i\varphi(x, y)],$

$$t(x, y) = \exp [i\varphi(x, y)] = \exp (iknd_0) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right]$$

gdzie: $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Rozważmy falę płaską padającą prostopadle na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right],$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna

Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

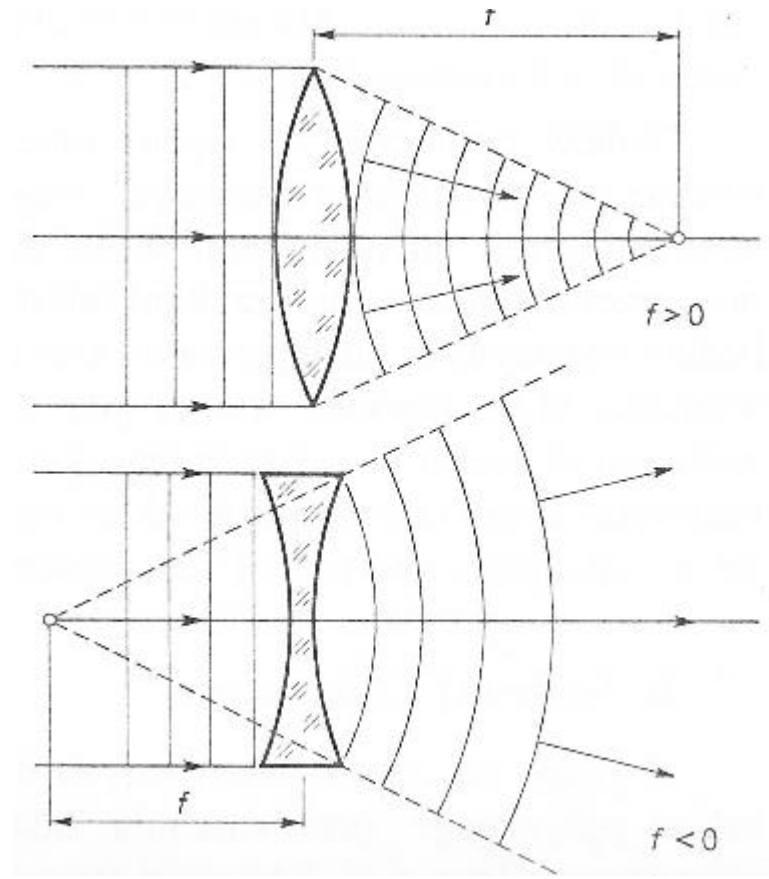
Rozważmy falę płaską padającą prostopadłe na soczewkę o ogniskowej f :

$$u^+(x, y) = A \exp(iknd_0) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right]$$

A – amplituda padającej fali (przedmiot)

Stałe przesunięcie fazy

Fala sferyczna



Soczewka – przekształcenie fazy fali świetlnej

Jeśli oświetlimy soczewkę falą sferyczną:

$$u^-(x, y) = A \exp \left[\frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) \right],$$

R – promień krzywizny powierzchni falowej.

$$\frac{1}{R_+} = \frac{1}{R_-} - \frac{1}{f}$$

R_-, R_+ – promień krzywizny przed i za soczewką.

Dla $R_- = f$ dostajemy $R_+ = \infty$

Gdy uwzględnimy aperturę soczewki i pominiemy stałą fazę:

$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right]$$

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Z wykładu 5, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2(xx_0 + yy_0)$$

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Z wykładu 5, dyfrakcja:

$$U(x_0, y_0) = \iint_{x,y} h(x_0, y_0, x, y) U_S(x, y) dx dy$$

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = x^2 + y^2 + \underbrace{x_0^2 + y_0^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Fraunhofer}}} } - 2 \underbrace{(xx_0 + yy_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Fraunhofer}}}$$

Dyfrakcja Fraunhofer:

$$h(x_0, y_0, x, y) \cong i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0} (x_0^2 + y_0^2)} e^{i \frac{k_0}{z_0} (xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x^2 + y^2)} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i \frac{k_0}{2z_0} 2(xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka:

$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right]$$

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Dyfrakcja Fresnela:

$$h(x_0, y_0, x, y) = i \frac{e^{ik_0 z_0}}{\lambda z_0} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x^2 + y^2)} e^{i \frac{k_0}{2z_0}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-i \frac{k_0}{2z_0} 2(xx_0 + yy_0)}$$

Soczewka:

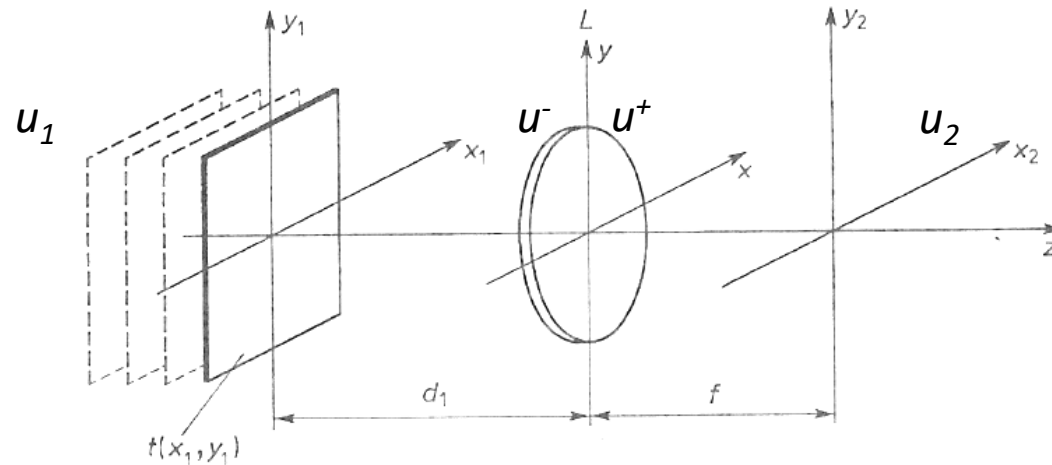
$$t(x, y) = P(x, y) \exp \left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2) \right]$$

Znoszą się !



Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą płaską:



$$x_0 = x_2$$

$$u_1(x_1, y_1) = A t(x_1, y_1)$$

Dyfrakcja Fresnela pola u^+ :

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Pole u^+ to obraz u^- transformowany przez soczewkę:

$$u^+(x, y) = P(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] u^-(x, y).$$

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

Pole u^+ to obraz u^- transformowany przez soczewkę:

$$u^+(x, y) = P(x, y) \exp\left[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] u^-(x, y).$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} u^+(x, y) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

Znoszą się

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

gdzie: $C = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f}$.

Soczewka jako element realizujący transformację Fouriera 2D

$$u_2(x_2, y_2) = C \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} u^-(x, y) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}(xx_2 + yy_2)\right] dx dy$$

Transformata Fouriera

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f}(x_1x_2 + y_1y_2)\right] dx_1 dy_1$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \mathcal{F}\{t(x_1, y_1)\}$$

Zeruje się gdy $d_1=f$

Transformata Fouriera przedmiotu

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Jeśli uwzględnimy aperturę soczewki
trzeba jeszcze to spleść z funkcją kształtu apertury

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$
$$\times \mathcal{F}\left\{t(x_1, y_1) P\left(x_1 + \frac{d_1}{f}x_2, y_1 + \frac{d_1}{f}y_2\right)\right\}$$

Zeruje się gdy $d_1=f$

skalowanie apertury

przeskalowana funkcja kształtu apertury

$$\mathcal{F}\left\{t(x_1, y_1) P\left(x_1 + \frac{d_1}{f}x_2, y_1 + \frac{d_1}{f}y_2\right)\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = T(x_1, y_1) \otimes FT\left(P\left(x_1 + \frac{d_1}{f}x_2, y_1 + \frac{d_1}{f}y_2\right)\right)$$

Soczewka – odpowiedź impulsowa

W układach liniowych zdefiniowaliśmy odpowiedź impulsową jako:

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

czyli transformata Fouriera sygnału f .

Dla soczewki mamy:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{A}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{d_1}{f} \right) (x_2^2 + y_2^2) \right] \times$$
$$\times \mathcal{F} \left\{ t(x_1, y_1) P \left(x_1 + \frac{d_1}{f} x_2, y_1 + \frac{d_1}{f} y_2 \right) \right\},$$

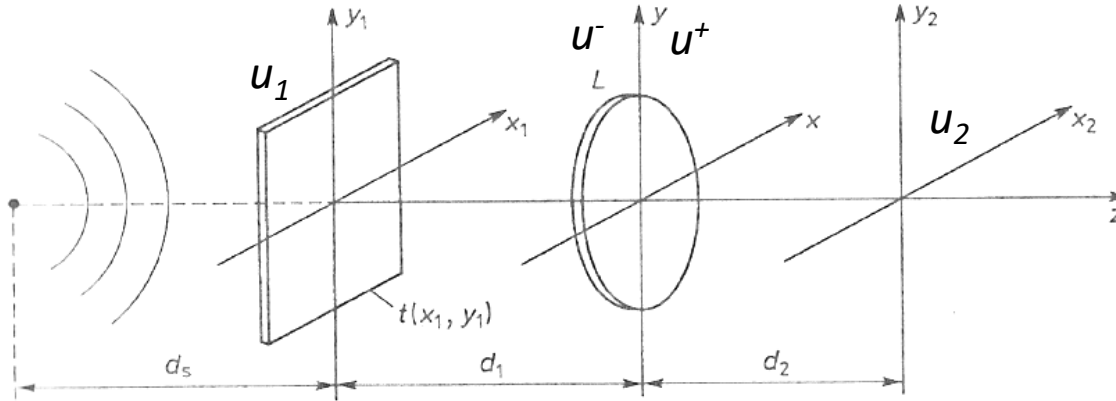
nasz sygnał

Czyli odpowiedź impulsowa soczewki:

$$h(x_2 - x, y_2 - y) = \frac{A}{i\lambda f} \exp \left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{d_1}{f} \right) (x_2^2 + y_2^2) \right] \iint_{-\infty}^{\infty} P \left(x_1 + \frac{d_1}{f} x_2, y_1 + \frac{d_1}{f} y_2 \right) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} (x_1 x_2 + y_1 y_2) \right] dx_1 dy_1$$

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{1}{i\lambda d_s} \exp\left[\frac{ik}{2d_s}(x_1^2 + y_1^2)\right] t(x_1, y_1)$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{v}{i^2 \lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp\left[\frac{ik}{2d_2}\left(1 - \frac{v}{d_2}\right)(x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda}(x_1 x_2 + y_1 y_2) \frac{v}{d_1 d_2}\right] dx_1 dy_1,$$

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$.

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną rozbieżną:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{v}{i^2 \lambda^2 d_s d_1 d_2} \exp \left[\frac{ik}{2d_2} \left(1 - \frac{v}{d_2} \right) (x_2^2 + y_2^2) \right] \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right] \times$$
$$\times \exp \left[-\frac{i2\pi}{\lambda} (x_1 x_2 + y_1 y_2) \frac{v}{d_1 d_2} \right] dx_1 dy_1,$$

Transformata Fouriera

gdzie: $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$.

kiedy to się zeruje mamy transformatę Fouriera

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

$$\frac{1}{d_s} + \frac{1}{d_1} - \frac{v}{d_1^2} = 0$$

uwzględniając $\frac{1}{v} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}$.

$$\frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f} \quad \text{- wzór soczewkowy}$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2d_2} \frac{(d_1 + d_s)(f - d_1)}{d_s f} (x_2^2 + y_2^2)\right] \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[-\frac{i2\pi(d_s + d_1 - f)}{\lambda d_s f} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1$$

czynniki skalujący

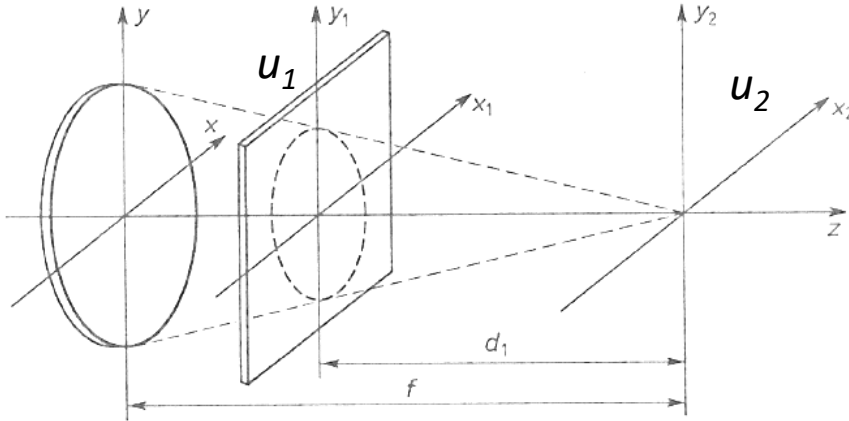
przeskalowana transformata Fouriera

Dla $d_1 = f$ skala transformata Fouriera jak przy fali płaskiej.

Zmiana skali możliwa przez zmianę: λ lub d_1

Soczewka jako element realizujący transformatę Fouriera 2D

Przedmiot oświetlony falą sferyczną zbieżną:



$$u_1(x_1, y_1) = \frac{Af}{d_1} \exp\left[-\frac{ik}{2d_1}(x_1^2 + y_1^2)\right] P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) t(x_1, y_1).$$

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{Af}{i\lambda d_1^2} \exp\left[\frac{ik}{2d_1}(x_2^2 + y_2^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) P\left(x_1 \frac{f}{d_1}, y_1 \frac{f}{d_1}\right) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda d_1}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1$$

czynniki skalujący