1100-4BW12, rok akademicki 2018/19

# WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Wykład 3

# Transformacja Fouriera 2D

Pary transformat:

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(\nu_x,\nu_y)$$

$$sgn(x,y) = sgn(x)sgn(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i\pi\nu_x}\frac{1}{i\pi\nu_y}$$

$$\mathrm{rect}(x,y) = \mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sinc}(\nu_x)\mathrm{sinc}(\nu_y) = \mathrm{sinc}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\Lambda(x,y) = \Lambda(x)\Lambda(y) \quad \Leftrightarrow \quad sinc^2(\nu_x)sinc^2(\nu_y) = sinc^2(\nu_x,\nu_y)$$

$$\delta(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad 1$$

$$\mathrm{comb}(x,y) = \mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{comb}(\nu_x)\mathrm{comb}(\nu_y) = \mathrm{comb}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\exp[i\pi(x+y)] \quad \Leftrightarrow \quad \delta\left(\nu_x - \frac{1}{2}, \nu_y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\exp[-\pi(x^2+y^2)] \quad \Leftrightarrow \quad \exp[-\pi({\nu_x}^2+{\nu_y}^2)]$$

$$\mathrm{circ(r)} = \mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} = \frac{J_1(2\pi\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2})}{\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2}}$$

# Transformacja Fouriera 2D

$$sgn(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{sgn(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-i\pi\nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{i\pi\nu_x}$$



Fourier.m

# Transformacja Fouriera 2D

$$sgn(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi \nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{sgn(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-i\pi \nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi \nu_x x)}{-i\pi \nu_x}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{i\pi \nu_x}$$

$\mathrm{rect}(x) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}(\nu_x)$

$$\mathcal{F}\{rect(x)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-i\pi \nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi \nu_x x)}{-i\pi \nu_x}\right|_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{i\pi \nu_x}\left[\exp\left(\frac{i\pi \nu_x}{2}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi \nu_x}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi \nu_x}\sin\left(\frac{\pi \nu_x}{2}\right)$$



Fourier.m

# Transformacja Fouriera 2D

$$\mathcal{F}\{cos(\pi\omega t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi\omega t)\exp(-i\pi\nu t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\pi\omega t) + \exp(-i\pi\omega t)]\exp(-i\pi\nu t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu - \omega)t]dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu + \omega)t]dt =$$

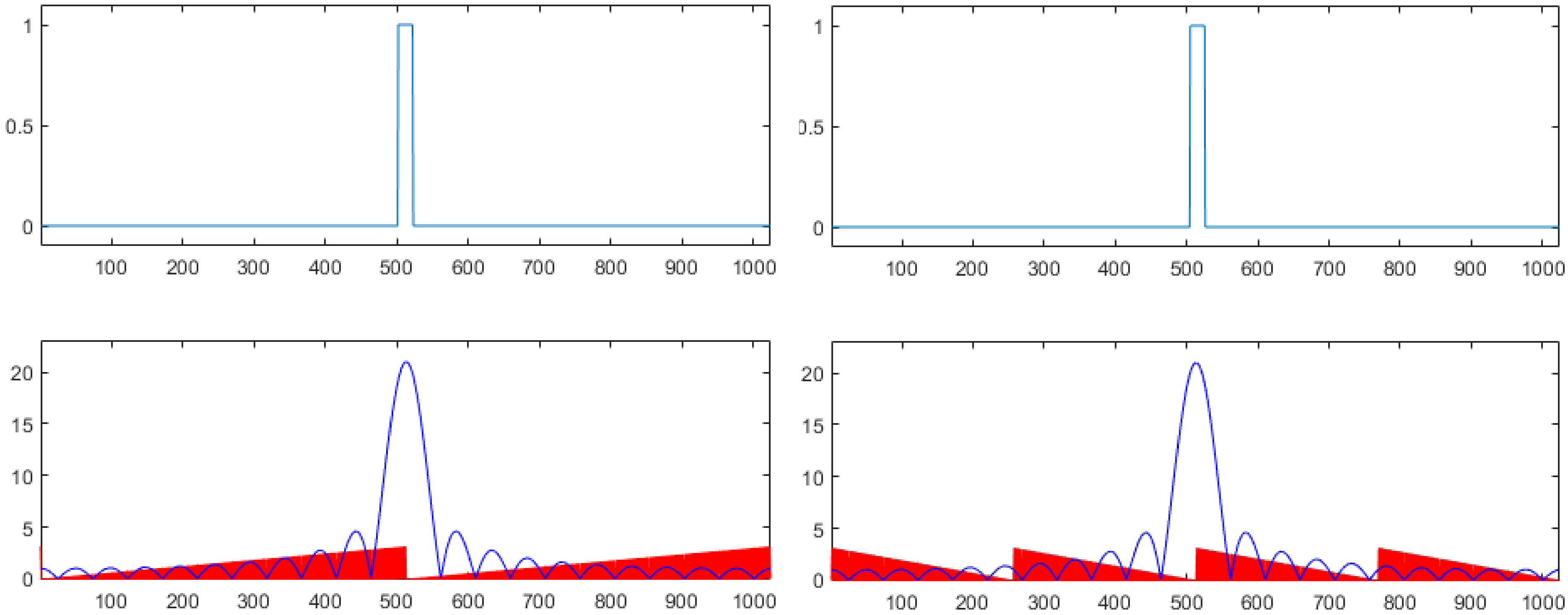
$$= \pi\delta(\nu - \omega) + \pi\delta(\nu + \omega)$$



Fourier.m

# Transformacja Fouriera 2D

Przesunięcie - Faza:

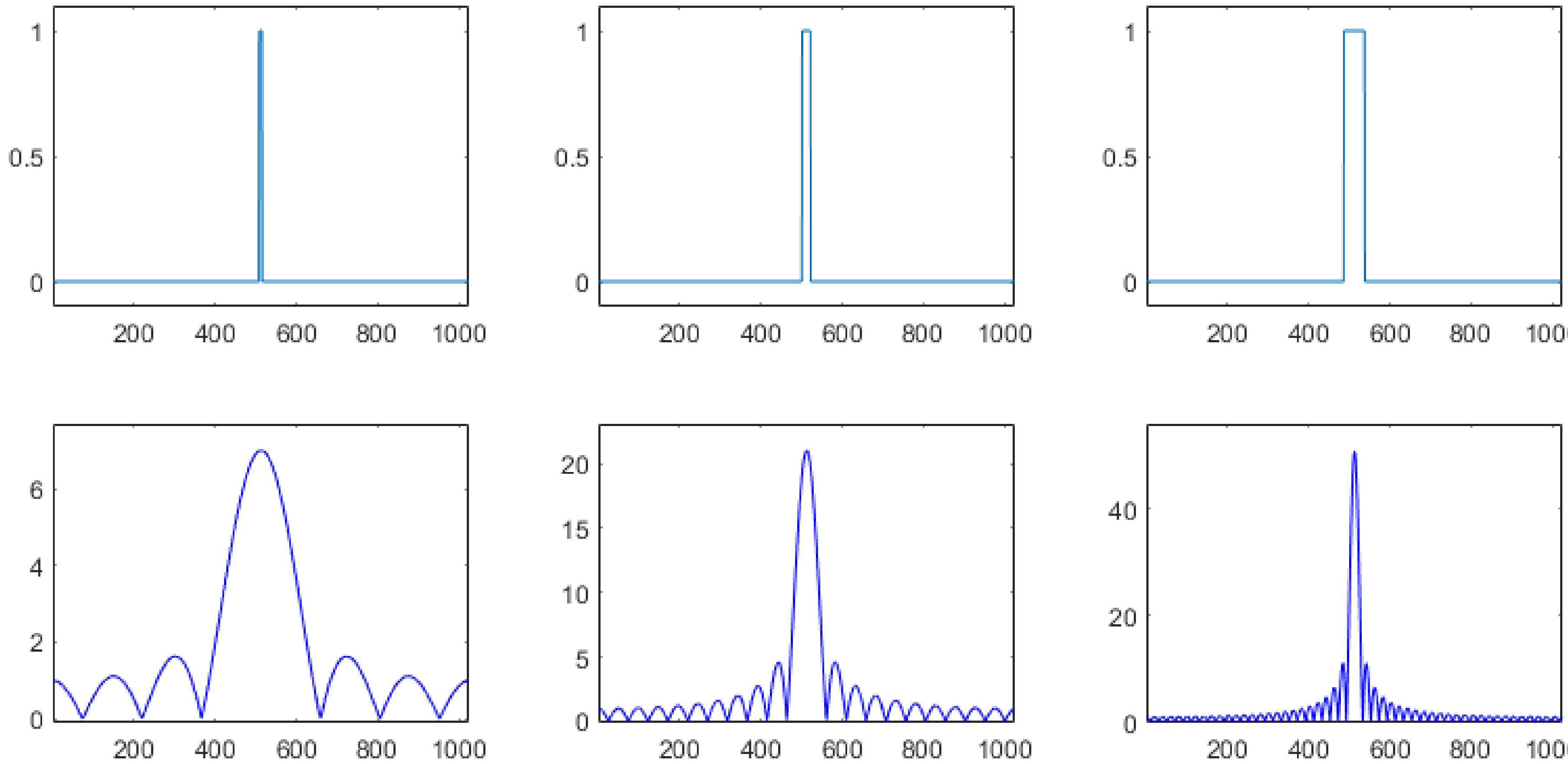





Fourier.m

# Transformacja Fouriera 2D

Skalowanie szerokości:




Fourier.m
Gui_2_3.m
Gui_3_4.m

# Układy liniowe

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF\left(\nu_x, \nu_y\right) + bG(\nu_x, \nu_y)$$

# Układy liniowe

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF\left(\nu_x, \nu_y\right) + bG(\nu_x, \nu_y)$$

Ogólnie – własność liniowości:

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) + \cdots + a_n f_n(x,y)\} =$$

$$= a_1 \mathcal{L}\{f_1(x,y)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(x,y)\} + \cdots + a_n \mathcal{L}\{f_n(x,y)\}$$

# Układy liniowe

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y)+bg(x,y)\}=aF\left(\nu_x,\nu_y\right)+bG(\nu_x,\nu_y)$$

Ogólnie – własność liniowości:

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(x,y)+a_2 f_2(x,y)+\cdots+a_n f_n(x,y)\}=$$

$$=a_1\mathcal{L}\{f_1(x,y)\}+a_2\mathcal{L}\{f_2(x,y)\}+\cdots+a_n\mathcal{L}\{f_n(x,y)\}$$

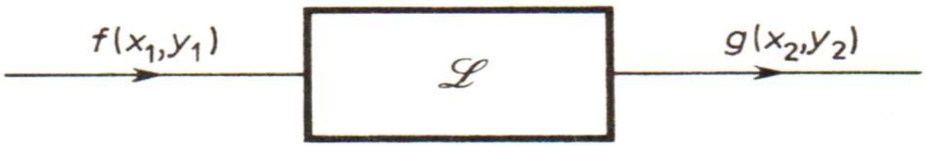
Własność filtracji:

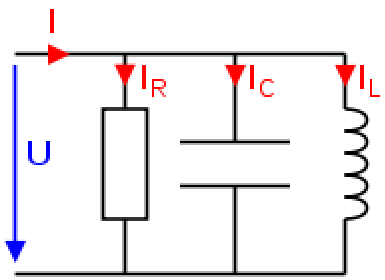
$$\int_{-\infty}^{\infty} g\,\delta(x-x_0)\,dx=g(x_0)$$

Wykład 1

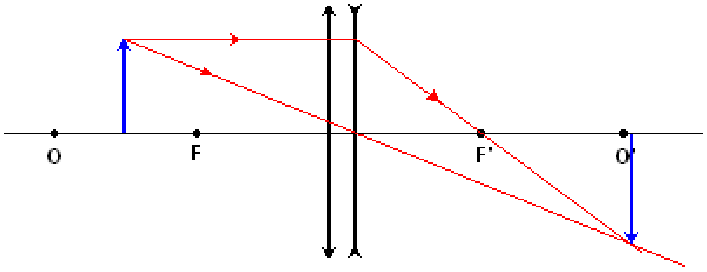
$$f(x_1,y_1)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x_1-x,y_1-y)dxdy$$

# Układy liniowe



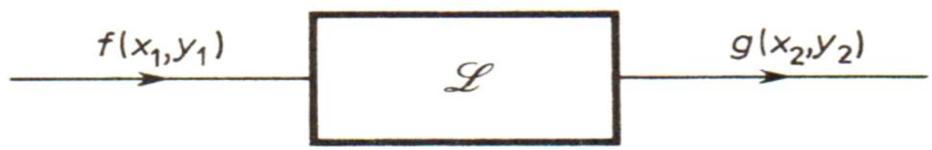



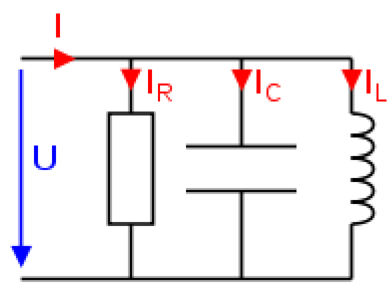

pl.wikipedia.org



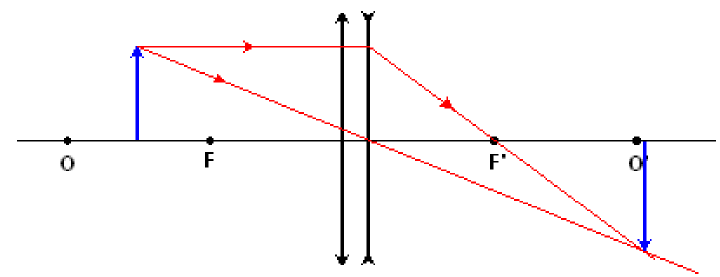

fizyka.edu.pl

# Układy liniowe




pl.wikipedia.org




fizyka.edu.pl

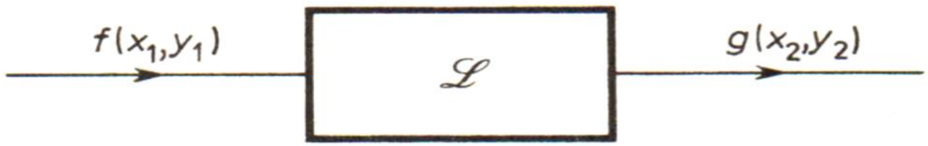
$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

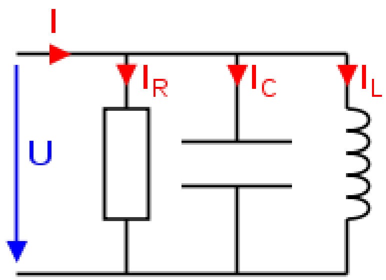
punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x_1 - x, y_1 - y)dxdy\right\}$$

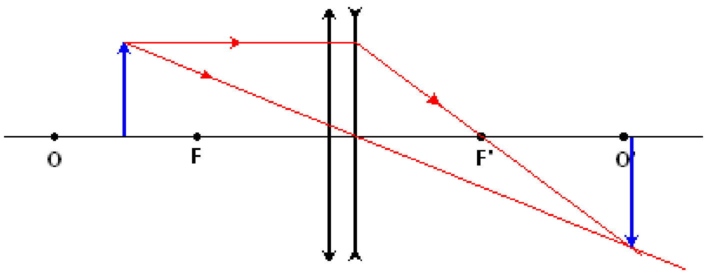
$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dxdy$$

# Układy liniowe




pl.wikipedia.org




fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x_1 - x, y_1 - y)dxdy\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)}dxdy$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}dxdy$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU

# Odpowiedź impulsowa

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dxdy$$

- Obraz punktu
- Plamka rozmycia (point-spread function)

- Obraz wyjściowy jest superpozycją obrazów poszczególnych punktów przedmiotu

- Funkcja *h* całkowicie charakteryzuje transformacyjne właściwości układu liniowego

# Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

# Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y)\, dx dy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

# Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y)\, dxdy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Z twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes h(x, y)\} = F(\nu_x, \nu_y) \underbrace{H(\nu_x, \nu_y)}_{\text{FUNKCJA PRZENOSZENIA UKŁADU}} = G(\nu_x, \nu_y)$$

$$H(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, dxdy$$

$H(\nu_x, \nu_y)$ jest filtrem częstości przestrzennych

# Fala płaska

Z równań Maxwella:

$$rot\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad rot\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$div\ \boldsymbol{D} = 0 \qquad div\ \boldsymbol{B} = 0$$

i równań materiałowych:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

i korzystając z tożsamości:

$$grad\ div - rot\ rot = \Delta$$

dostajemy równanie falowe:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

W postaci ogólnej:

$$\Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299792458\ \frac{m}{s}$$

# Fala płaska

Zakładamy, że rozwiązaniem równania falowego:

$$\Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

jest fala monochromatyczna typu:

$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z)\cos[2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]$$

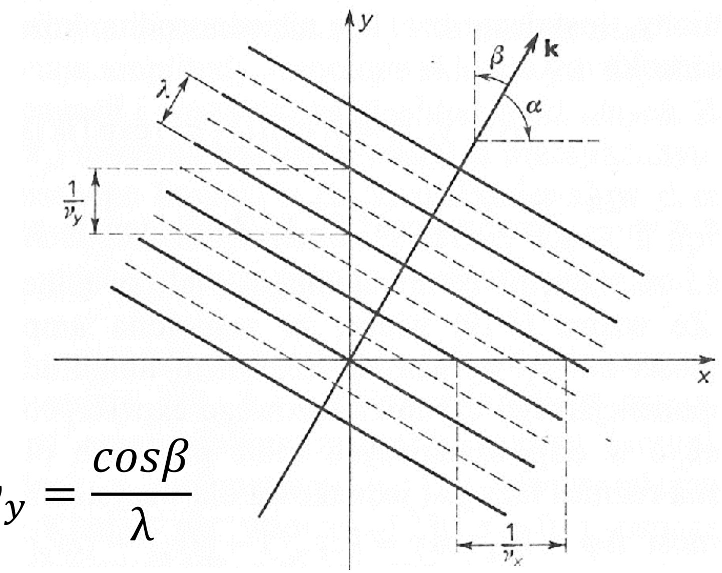
$$u(x, y, z, t) = a(x, y, z)\exp(-i2\pi\nu t)$$

Podstawiając falę monochromatyczną do równania falowego dostajemy:

$$u(x, y, z) = \mathrm{A}\exp[i(kr + \varphi)]$$

gdzie *k* jest wektorem falowym:

$$k = \frac{2\pi\nu}{\vartheta} = \frac{2\pi}{\lambda}$$




$$\nu_x = \frac{sin\alpha}{\lambda} \quad \nu_y = \frac{cos\beta}{\lambda}$$

# Fala płaska

Inne możliwe rozwiązania równania falowego:

fala o określonym kierunku propagacji

$$u(x, y, z, t) = f(k_x x + k_y y + k_z z - \mathrm{v}|k|t)$$

fala monochromatyczna o określonym kierunku propagacji

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z)\exp[i(\beta z - \omega t)]$$

fala o określonej częstości

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z)\exp[i(\varphi(r) - \omega t)]$$

amplituda faza częstość kołowa

$$\omega = 2\pi\nu$$

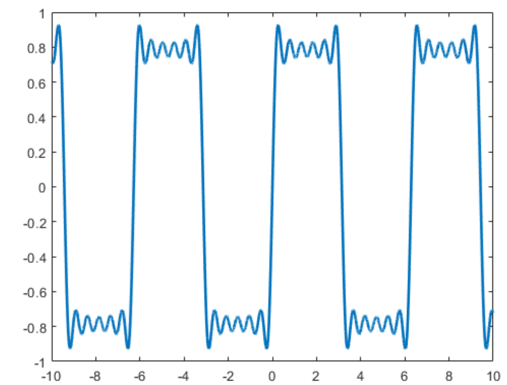
$$u(x, y, z, t) = \underbrace{a(x, y, z)exp\big(i\varphi(r)\big)}_{\text{amplituda zespolona}}\underbrace{\exp(-i\omega t)}_{\text{zależność od czasu}}$$

# Rozkład pola na fale płaskie

Dowolne pole może być przedstawione jako superpozycja (suma) fal monochromatycznych:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}u_{\nu}(x,y,z)\exp[-i2\pi\nu t]$$

Transformata Fouriera:




$$F\left(\nu_x,\nu_y\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)exp\left[-i2\pi\left(x\nu_x+y\nu_y\right)\right]dx\,dy$$

Dowolne pole optyczne rozkładam za pomocą transformaty Fouriera na superpozycję fal monochromatycznych:

$$u(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}U(\nu_x,\nu_x)exp\left[-i2\pi\left(x\nu_x+y\nu_y\right)\right]d\nu_x d\nu_y$$