

Fizyka Pogody i Klimatu, zima 2021

Dynamika

Szymon Malinowski

Metody opisu ruchu płynu, skale ruchu.

*Siły działające na cząstkę (elementarną objętość)
powietrza.*

Równanie ruchu, analiza skali, przybliżenie geostroficzne.

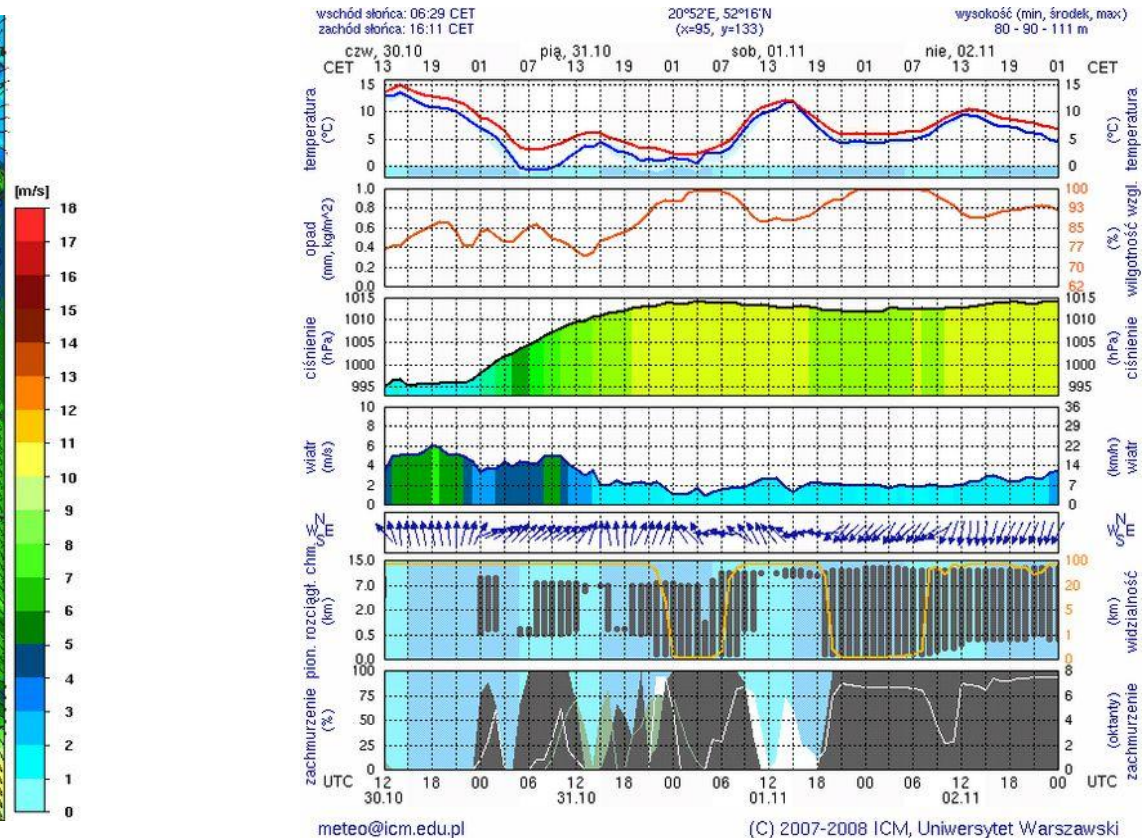
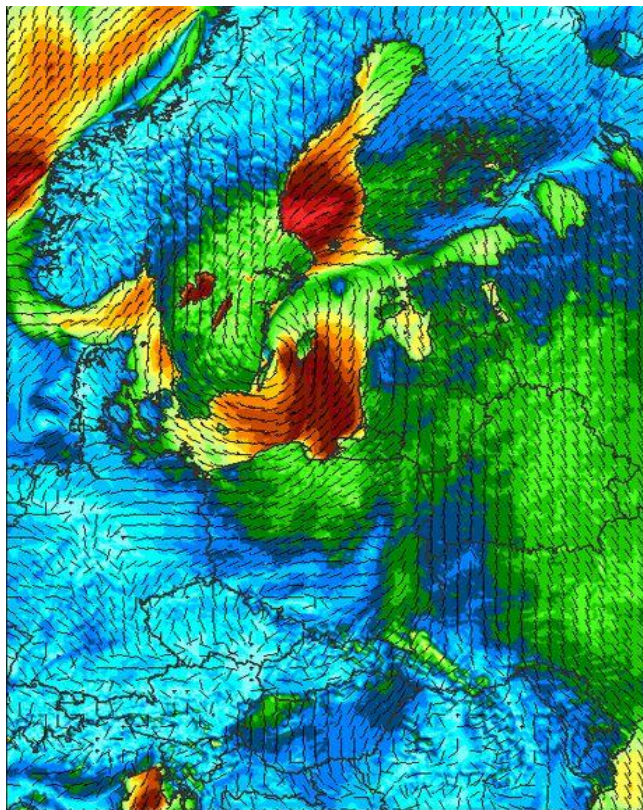
Przepływy zrównoważone, wiatr.

Metody opisu ruchu.

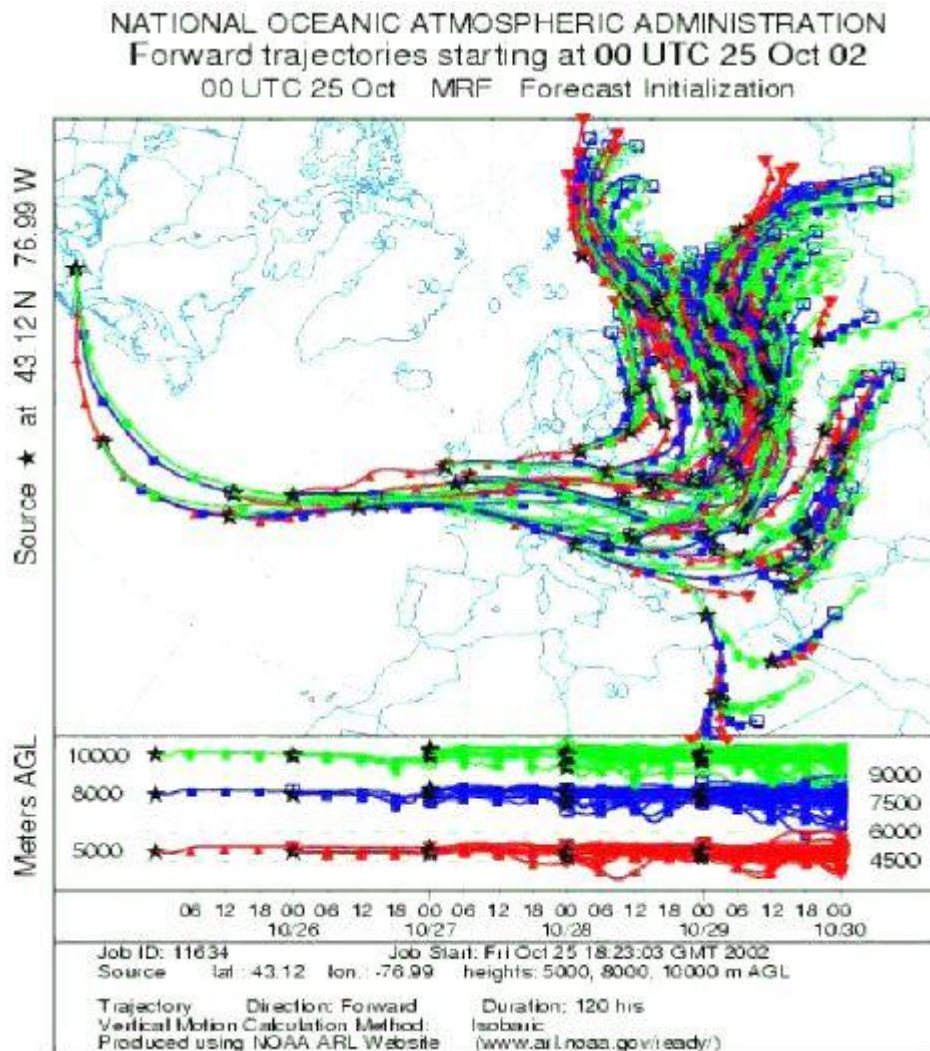
Do opisu ruchu powietrza można używać dwóch sposobów. Jeden z nich zwany jest opisem metodą **Eulera**, drugi zaś metodą **Lagrange'a**.

Metoda Eulera polega na określeniu właściwości powietrza jako funkcji położenia w przestrzeni (r) i w czasie (t). Podstawową wielkością charakteryzującą ruch powietrza jest prędkość V , która zależy od położenia i czasu: $V(r,t)$.

Opis tą metodą można uznać za obraz przestrzennego rozkładu prędkości powietrza w każdej chwili podczas jego ruchu. Oczywiście jeśli skupimy uwagę na określonym elemencie objętości, to powietrze, które wypełnia ten element, będzie się nieustannie zmieniało. Innymi słowy opis metoda Eulera pozwala na opisanie POLA RUCHU, POLA PRZEPŁYWU. Metodą Eulera możemy też opisywać inne pola: temperatury ciśnienia itp.



Metoda Lagrange'a powietrze jako zbiór małych cząstek („baloników”). Prędkość każdej cząstki jest funkcją czasu: $V(t)$ Metoda ta opisuje historię ruchu każdej cząstki powietrza w atmosferze, na jej podstawie można obliczyć TRAJEKTORIĘ ruchu cząstki, $r(t)$, to znaczy historię jej położenia w czasie. Niestety nie da się nią w prosty sposób wyznaczyć przestrzennego rozkładu prędkości, natomiast stosunkowo łatwo jest śledzić ruch każdej cząstki. Innymi słowy, w opisie Lagrange'a nie widzimy pola ruchu, ale możemy pokazać skąd dana cząstka (objętość) powietrza przyplłynęła, możemy prześledzić jej ewolucję.



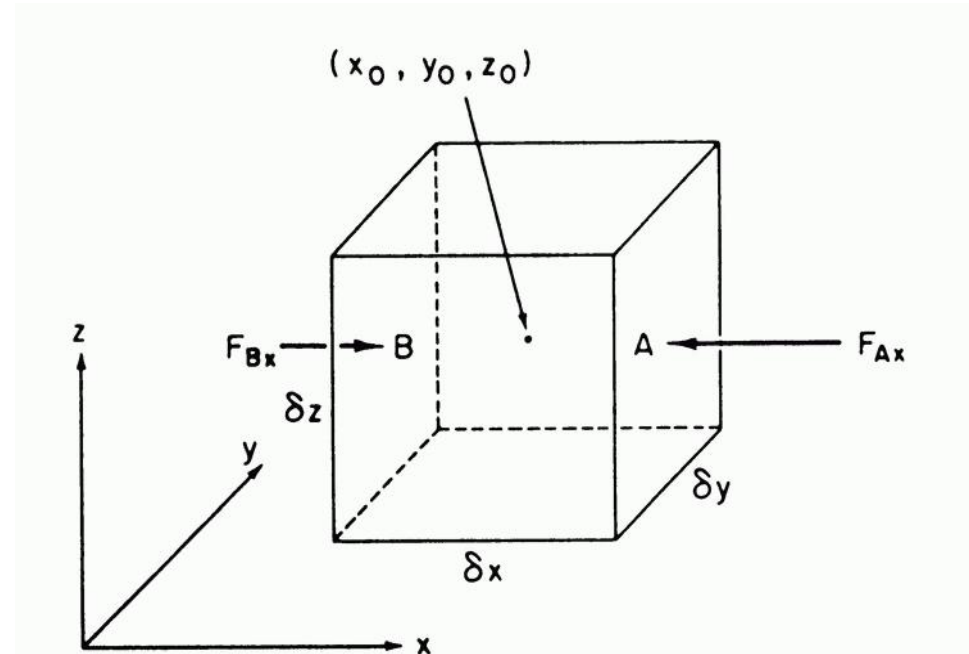
Analiza skali.

Analiza skali, lub skalowanie, jest wygodną techniką szacowania wielkości wyrażen w równaniach opisujących określone typy ruchu. W skalowaniu określone są charakterystyczna długość, głębokość i skale czasu, w których zachodzą przepływy które chcemy opisać oraz charakterystyczne zakresy zmienności pól (temperatury, ciśnienia, prędkości i.t.p.) obserwowane w tych skalach. Te typowe wartości są następnie użyte do porównania wielkości różnych wyrażen w równaniach ruchu. Charakter przepływów atmosferycznych silnie zależy od skali poziomej, skala ta stanowi wygodne narzędzie klasyfikacji układów.

Typ przepływu	Skala pozioma (m)
Średnia droga swobodna.....	10^{-7}
Przepływy bezwirowe (laminarne).....	10^{-3}
Najmniejsze wiry.....	10^{-2} - 10^{-1}
Małe wiry.....	10^{-1} -1
Zawirowania unoszące kurz czy piasek.....	1-10
Podmuchy wiatru.....	10 - 10^2
Tornado.....	10^2
Chmury <i>cumulonimbus</i>	10^3
Fronty, linie szkwałowe.....	10^4
Huragany.....	10^5 - 10^6
Niże i wyże.....	10^6
Cyrkulacja globalna.....	10^7

Siła gradientu ciśnienia.

Ciśnienie wywierane na powierzchnię cząstki powietrza zdefiniowane jest jako składowa normalna siły wywieranej przez jej otoczenie, przypadająca na jednostkę pola powierzchni. Ta siła skierowana jest zawsze do wnętrza cząstki, co ilustruje poniższy rysunek:



Cząstka dozna oddziaływania siły wypadkowej tylko wówczas, gdy ciśnienia na jej przeciwległych powierzchniach nie będą równe. Tę siłę nazywa się siłą gradientu ciśnienia.

Całkowity gradient ciśnienia na jednostkę masy wyraża się wzorem:

$$\frac{F}{m} = - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

gdzie: ρ - gęstość powietrza, p – pole ciśnienia w atmosferze. Siła ta jest proporcjonalna do gradientu ciśnienia, a nie samego ciśnienia.

Efektywna siła ciężkości (ang. Gravity).

Cząstka o jednostkowej masie, spoczywająca na powierzchni Ziemi, obserwowana w układzie obracającym się z Ziemią, jest obiektem działania siły odśrodkowej:

$$m \Omega^2 R$$

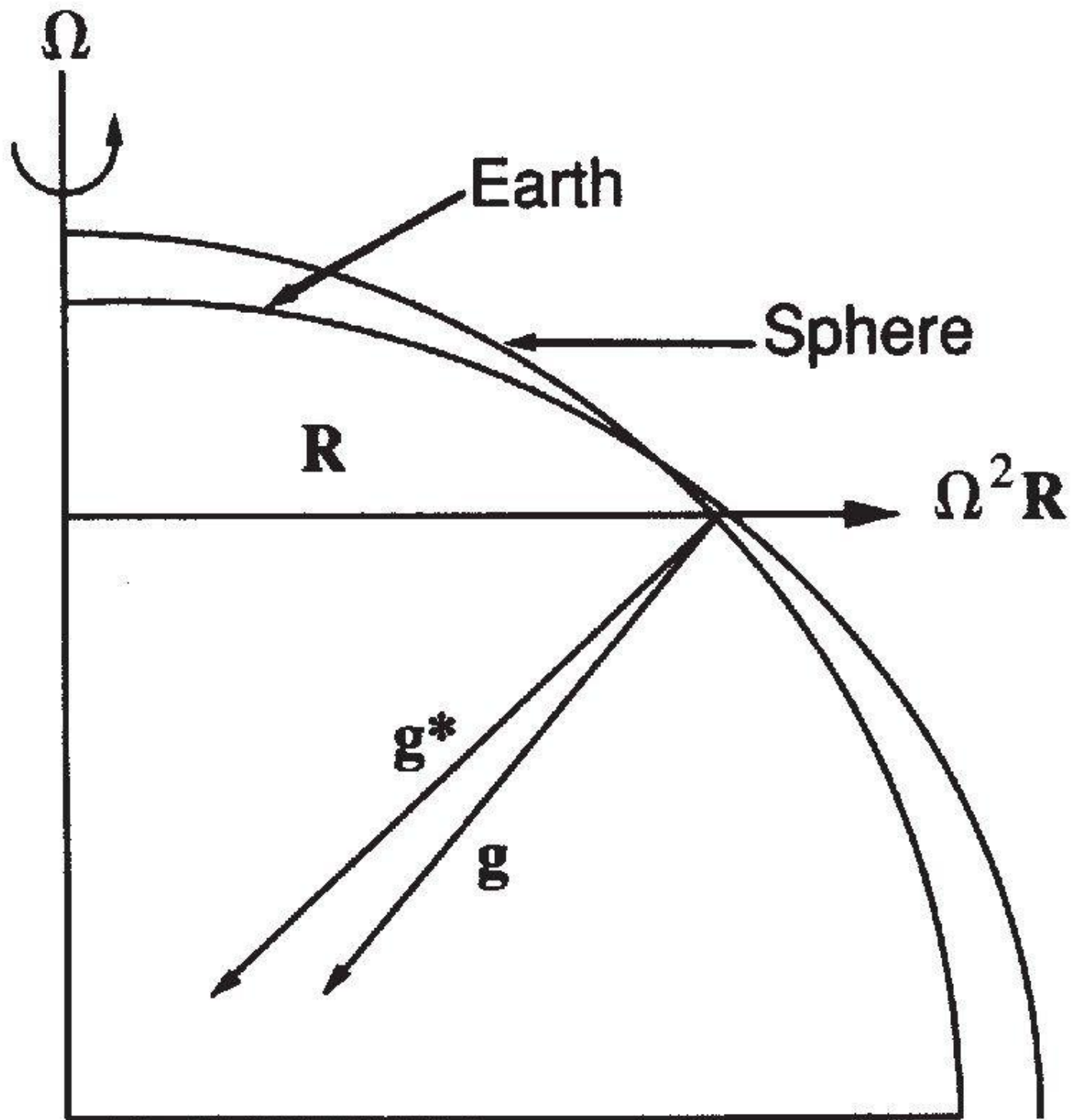
gdzie Ω jest prędkością kątową Ziemi ($\Omega=7.292 \cdot 10^{-5}$ rad s⁻¹) i R jest odległością cząstki od osi obrotu.

Ciężar cząstki o masie m spoczywającej na powierzchni Ziemi, jest wtedy mniejszy niż siła ciężkości, ponieważ siła odśrodkowa częściowo równoważy siłę grawitacyjną. Dlatego wygodnie jest łączyć oddziaływanie siły ciężkości i odśrodkowej wprowadzając efektywną (odczuwalną) siłę ciężkości (ang. gravity) :

$$g_{\text{eff}} = g - \Omega^2 R$$

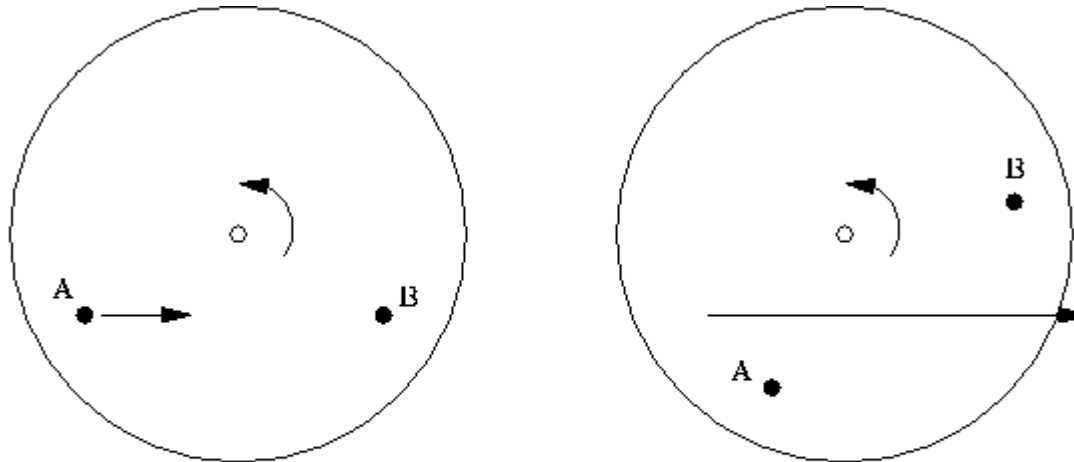
Siła grawitacyjna jest skierowana w kierunku środka Ziemi, podczas gdy siła odśrodkowa jest skierowana na zewnątrz od osi obrotu. Dlatego, poza biegunami i równikiem, g_{eff} nie jest skierowana do środka Ziemi.

Jeśli Ziemia byłaby idealną kulą, g_{eff} miałaby równikową składową, równoległą do jej powierzchni. Ziemia jako elipsoida obrotowa z równikową wypukłością, ma wszędzie skierowane normalnie do poziomu powierzchni. W konsekwencji, równikowy promień Ziemi jest o 21 km dłuższy niż promień biegunowy. W dodatku miejscowy pion, który jest brany równoległe do g_{eff} , nie przechodzi przez środek Ziemi, poza równikiem i biegunami.



Siła Coriolisa.

Opis matematyczny siły Coriolisa można otrzymać rozpatrując ruch hipotetycznej cząstki o jednostkowej masie, to jest ruch swobodny na beztarciowej poziomej powierzchni na obracającej się Ziemi. Jeśli cząstka jest początkowo w stanie spoczynku względem Ziemi, to działają na nią tylko siły grawitacji i odśrodkowa. Załóżmy teraz, że cząstka jest w ruchu w kierunku wschodnim.



Object is propelled from point A on a rotating turntable towards point B. It travels in a straight line but before it reaches B, the turntable has rotated and the object passes to the right of B. To an observer at A the trajectory of the object appears to have been deflected to the right by an imaginary force - the Coriolis force.

W efekcie cząstka wiruje teraz szybciej niż Ziemia i siła odśrodkowa działająca na nią wzrasta. Gdy przez Ω oznaczymy prędkość kątową Ziemi, \mathbf{R} wektor położenia cząstki względem osi obrotu i u wschodnią składową prędkości cząstki względem podłoża, to całkowita siła odśrodkowa będzie wyrażała się wzorem:

$$\frac{u^2}{R} \mathbf{R} + \Omega^2 R \mathbf{R} - \frac{2u\Omega}{R} \mathbf{R} - \frac{u^2}{R^2} \mathbf{R}$$

Pierwszy człon z prawej strony jest właśnie siłą odśrodkową należącą do obracającej się Ziemi. Pozostałe dwa człony reprezentują siły odchyłające, które działają na zewnątrz wzdłuż wektora \mathbf{R} (to jest, prostopadle do osi obrotu). Dla synoptycznej skali ruchów $|u| \ll \Omega R$ i ostatni człon może być zaniedbany w pierwszym przybliżeniu. Człon:

$$2u\Omega \mathbf{R}/R$$

jest siłą Coriolisa związaną z ruchem wzdłuż równoleżnika. Siłę tą możemy rozłożyć na składowe w kierunkach równoleżnikowym i południkowym. Ruch względny w kierunku wschód-zachód wywołuje przyspieszenie w kierunku północ-południe i w pionie:

$$\frac{dw}{dt} \Big|_{Co} = -2u \sin \varphi \quad \frac{dw}{dt} \Big|_{Co} = 2u \cos \varphi$$

Cząstka poruszająca się na wschód w płaszczyźnie poziomej na półkuli północnej jest odchylna na południe, podczas gdy cząstka poruszająca się ku zachodowi jest odchylna na północ. W obu przypadkach odchylenie działa w prawo od kierunku ruchu. Pionowa składowa siły Coriolisa jest dużo mniejsza niż siła grawitacji i ma mały wpływ na zmianę ruchu.

Dotychczas rozważaliśmy siłę Coriolisa spowodowaną ruchem w kierunku wschód-zachód. Załóżmy teraz, że cząstka zostaje wprawiona w ruch wzdłuż równika. W tym przypadku wzrasta odległość do osi obrotu R , zmiana tej odległości wynosi δR dla południkowego przesunięcia z szerokości geograficznej ϕ_0 do szerokości $\phi_0 + \delta\phi$.

$$\Omega R^2 = \left(\Omega + \frac{\delta u}{R + \delta R} \right) (R + \delta R)^2,$$

gdzie δu jest wschodnią składową prędkości względnej kiedy na szerokości $\phi_0 + \delta\phi$. Rozpisując prawą stronę, zanedbując różniczkę drugiego rzędu i rozwijając dla δu mamy:

$$\delta u = -2\Omega\delta R = +2\Omega a \delta\phi \sin\phi_0,$$

gdzie $\delta R = -a\delta\phi \sin\phi_0$. Dzieląc przez przyrost czasu δt w granicy $\delta t \rightarrow 0$, otrzymamy:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{Co} = 2\Omega a \frac{d\phi}{dt} \sin\phi_0 = 2\Omega v \sin\phi,$$

gdzie $v = a d\phi/dt$ jest północną składową prędkości.

Podobnie, gdy cząstka jest puszczona w ruch pionowo na szerokości ϕ_0 , doznaje przyspieszenia w kierunku wschód-zachód równego $-2\Omega w \cos\phi_0$, (w prędkość pionowa). W ten sposób w ogólnym przypadku mamy:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{Co} = 2\Omega v \sin\phi - 2\Omega w \cos\phi.$$

Równanie ruchu.

Jeśli przyjmiemy że jedyne rzeczywiste siły działające na cząstkę powietrza to siła gradientu ciśnienia, grawitacja i tarcie, możemy przepisać drugą zasadę Newtona z pomocą powyższego równania jako:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{F}_t,$$

gdzie \vec{F}_t oznacza siły tarcia

Widać, że przyspieszenie cząstki wywoływane jest przez siłę Coriolisa, siłę gradientu ciśnienia, efektywnej siły ciężkości („gravity”) i tarcie.

Ta forma równania ruchu stanowi podstawę meteorologii dynamicznej.

Rozwińmy teraz wektorową postać równania ruchu na składowe we współrzędnych sferycznych z powierzchnią Ziemi jako powierzchnią odniesienia. Ośiami współrzędnych są wtedy (λ, ϕ, z) , gdzie λ jest długością geograficzną, ϕ szerokością geograficzną, a z wysokością nad powierzchnią Ziemi. Ostatecznie otrzymujemy wyrażenia:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + F_{tx}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + F_{ty}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \phi + F_{tz},$$

które są odpowiednio wschodnią, północną i pionową składową równania ruchu.

Analiza skali równań ruchu

Analiza ta polega na oszacowaniu wielkości poszczególnych składników w równaniach ruchu. Dzięki temu, dla ruchów obejmujących tylko niektóre skale wszystkich przepływów atmosferycznych niektóre człony można pominąć.

Rozmiary charakterystyczne przepływów w skali synoptycznej to 2000 km. Są one mniejsze niż rozmiary ruchów w skali globalnej, jednak wystarczająco duże, aby można je było wyodrębnić za pomocą konwencjonalnej sieci obserwacji meteorologicznych.

Ażeby uprościć równania ruchu atmosfery tak, żeby dobrze opisywały przepływy w synoptycznej skali ruchów, zdefiniujmy następujące charakterystyczne skale w średnich szerokościach geograficznych:

$$U \sim 10 \text{ m s}^{-1} - \text{skala prędkości horyzontalnej}$$

$$W \sim 1 \text{ cm s}^{-1} - \text{skala prędkości pionowej}$$

$$L \sim 10^6 \text{ m} - \text{skala długości} - 1000 \text{ km}$$

$$D \sim 10^4 \text{ m} - \text{skala głębokości} - 10 \text{ km}$$

$$\delta P / \rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} - \text{horyzontalna skala fluktuacji ciśnienia}$$

$$L/U \sim 10^5 \text{ s} - \text{skala czasu}$$

Horyzontalne fluktuacje ciśnienia δP są znormalizowane przez gęstość ρ , ażeby wytworzyć skalę, która jest ważna na wszystkich wysokościach w troposferze, mimo wykładniczego zmniejszania z wysokością obydwu: δP i ρ .

$\delta P / \rho$ ma jednostki geopotencjału.

Patrząc na $-1/\rho(\partial p/\partial y)_z = -(\partial\Phi/\partial y)_p$ zobaczymy jakie wielkości w fluktuacji $\delta P/\rho$ na powierzchni na stałej wysokości, muszą równać się wielkości fluktuacji geopotencjału na powierzchni izobarycznej.

Skala czasu jest tutaj adwekcyjną skalą czasu, która jest stosowana dla systemu ciśnienia, które porusza się w przybliżeniu z szybkością horyzontalnego wiatru, jak jest obserwowane dla skali synoptycznej. W ten sposób L/U jest czasem potrzebnym do pokonania drogi L z prędkością U i pochodną substancjalną operatora $d/dt \sim U/L$ dla takich ruchów.

Możemy teraz oszacować wielkość każdego wyrazu w równaniach na wschodnią i północną składową równania ruchu dla skali synoptycznej w danej szerokości geograficznej.

Poniższa tabela pokazuje właśnie te charakterystyczne wielkości.

	A	B	C	D	E	F	G
X:	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{tx}$
Y:	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ty}$
S:	$\frac{U^2}{L}$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{vU}{D^2}$
W:	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

Przybliżenie geostroficzne

Z powyższej tabeli widać, że pierwsze przybliżenie równań ruchu daje:

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

gdzie $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ zwane jest parametrem Coriolisa.

Prędkość powietrza, określona z warunku równowagi między siłą Coriolisa i siłą gradientu ciśnienia dana wzorem $\vec{V}_g \equiv i u_g + j v_g$ nazywa się wiatrem geostroficznym. Jego definicję

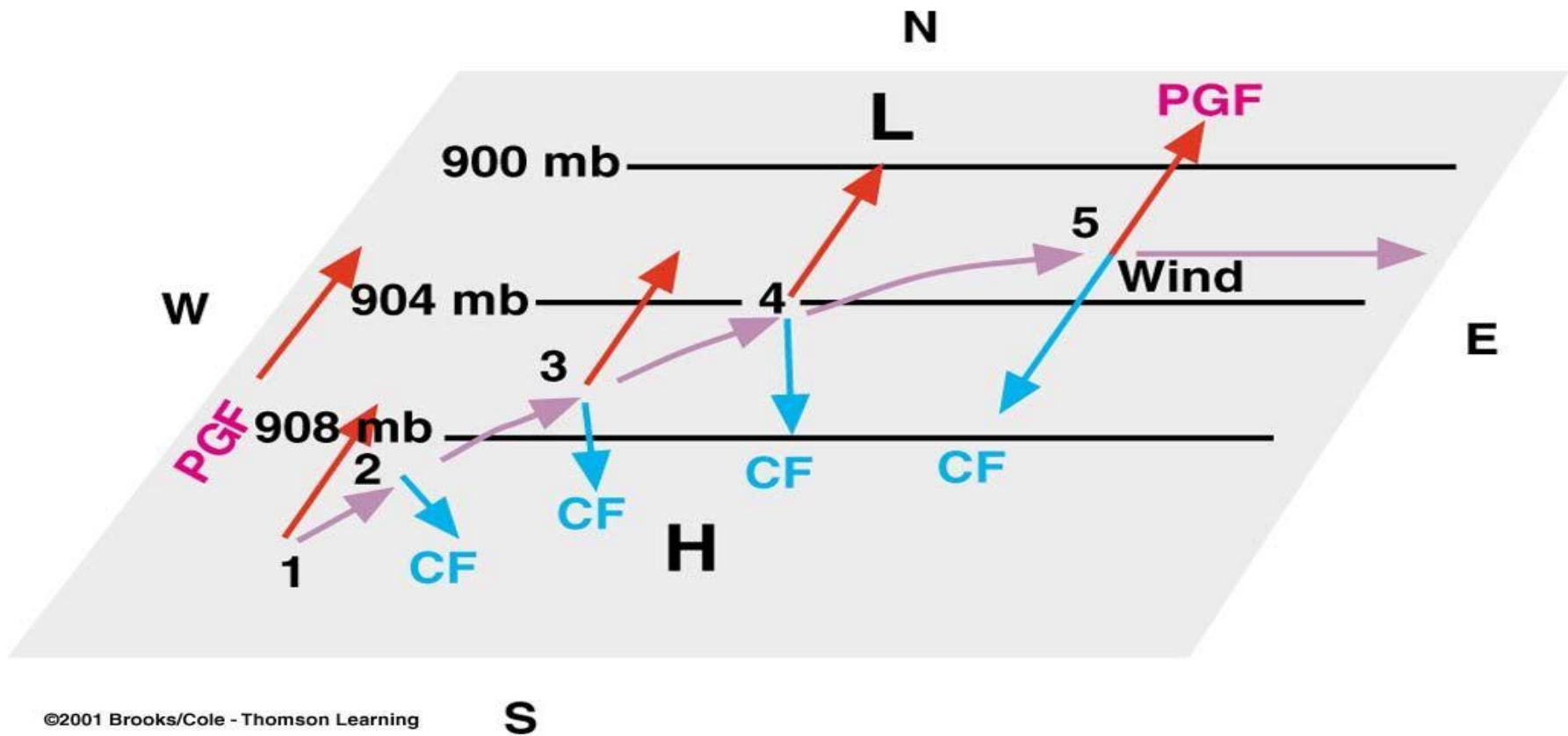
można zapisać w postaci:

$$\vec{V}_g \equiv k \times \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p.$$

W średnich szerokościach geograficznych wiatr geostroficzny przybliży rzeczywistą prędkość przepływu powietrza z dokładnością 10-15%.

Ruch w poziomie – wiatr.

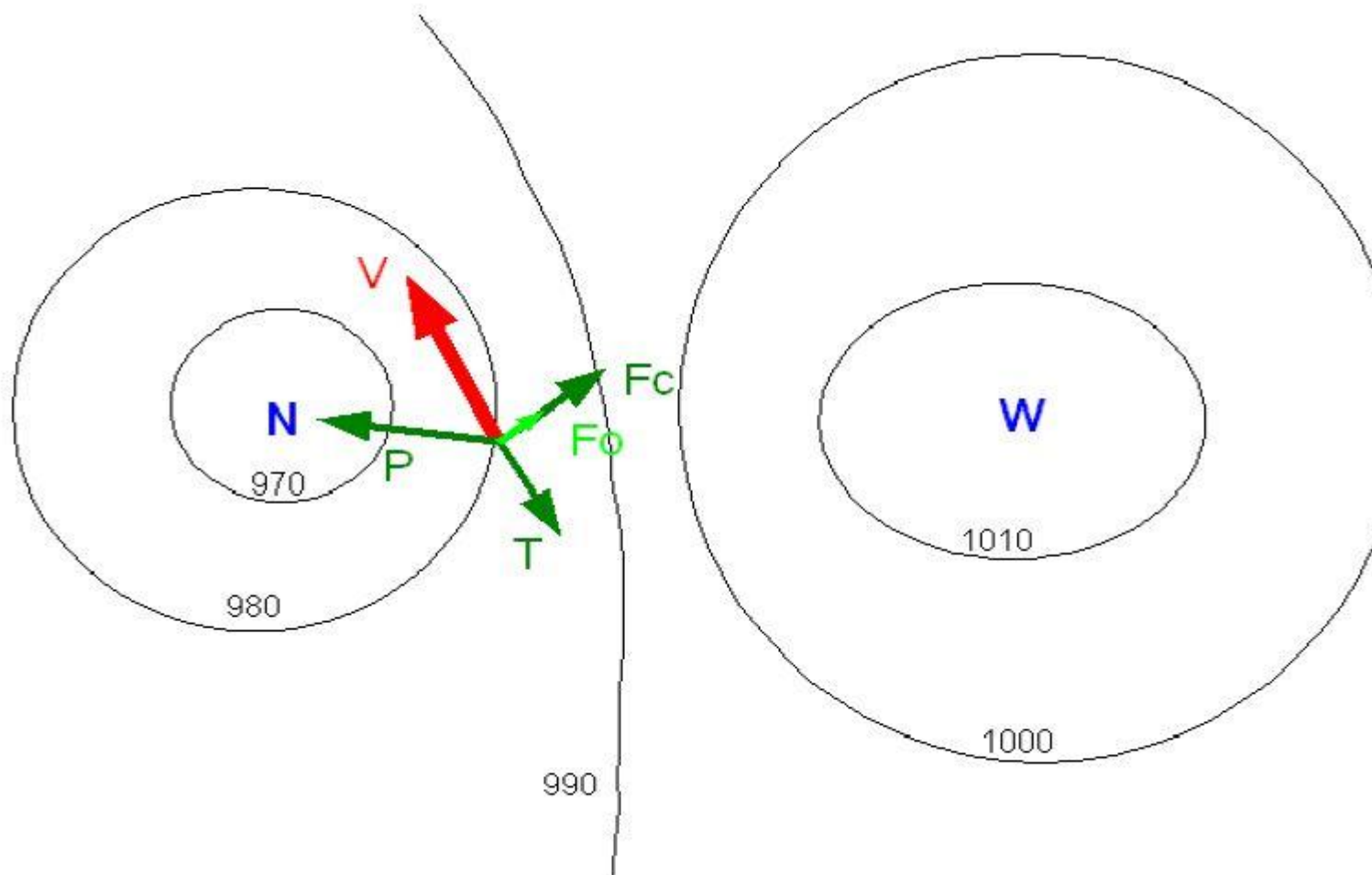
Rozważmy cząstkę powietrza na półkuli północnej. Cząstka jest w stanie spoczynku, nagle pojawia się poziomy gradient ciśnienia.



Cząstka, początkowo w bezruchu przyspiesza (fioletowe strzałki na rysunku) pod wpływem siły gradientu ciśnienia (czerwone strzałki) kierując się od wysokiego ciśnienia (H) w kierunku niskiego ciśnienia (L).

Gdy tylko prędkość cząstki staje się większa od zera pojawia się siła Coriolisa (niebieskie strzałki), zakrzywiająca tor ruchu w prawo. W pewnym momencie - przy pewnej prędkości - dochodzi do równowagi tych sił (równowaga geostroficzna) i ruch odbywa się jednostajnie (ze stałą prędkością) wzdłuż izobar.

Taki obraz ruchu jest prawdziwy w wypadku, gdy siły tarcia są zanedbywalnie małe, w praktyce powyżej tzw. warstwy granicznej atmosfery, obejmującej kilkaset najniższych metrów nad powierzchnią Ziemi. W wypadku gdy siła tarcia nie może być zanedbana, równowaga sił wygląda jak na rysunku:



Schemat sił działających na cząstkę powietrza. Na niebiesko zaznaczono siły: P - siła gradientu ciśnienia; T - siła tarcia; F_c - pozioma składowa siły Coriolisa (w tę stronę działa na półkuli północnej); Czarnymi liniami oznaczono izobary, N - środek niżu, W - centrum wyżu, czerwoną strzałką V oznaczono wektor prędkości wiatru.

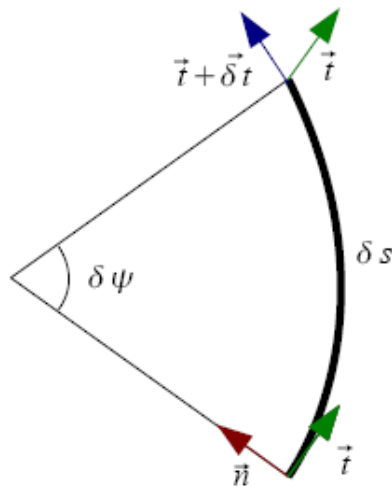
Przepływy zrównoważone (ang. "Balanced flows").

Przepływy atmosferyczne i oceaniczne zależą od następujących sił: siły ciężkości (gravity), siły gradientu ciśnienia, siły Coriolisa, siły tarcia oraz, w przypadku ruchu po krzywej od siły odśrodkowej.

Przepływy zrównoważone to takie, dla których siły działające na cząstkę powietrza się równoważą. W takim wypadku nie ma przyspieszeń i mamy do czynienia z przepływami stacjonarnymi. Ze względu na bardzo dobre zrównoważenie siły ciężkości przez pionową składową gradientu ciśnienia (równowaga hydrostatyczna) będziemy rozważać tylko zrównoważone przepływy w poziomie (wiatr).

Przepływy zrównoważone badać będziemy w tzw. naturalnym układzie współrzędnych.

Współrzędna s (styczna, wersor \vec{t}) jest w tym układzie skierowana wzdłuż wektora prędkości, a współrzędna normalna n (wersor \vec{n} skierowana w lewo pod kątem prostym do współrzędnej s).



$$\vec{V} = V \vec{t}, V = \frac{ds}{dt}, |\vec{t}| = 1$$

$$\delta \psi = \frac{\delta s}{R} = |\delta \vec{t}|, R > 0 \text{ dla lewoskrętnego}, R < 0 \text{ dla prawoskrętnego}$$

$$\delta \vec{t} \parallel \vec{n}, \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} V, \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V \vec{t}) = \frac{dV}{dt} \vec{t} + V \frac{d\vec{t}}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + V^2 \frac{\vec{n}}{R}$$

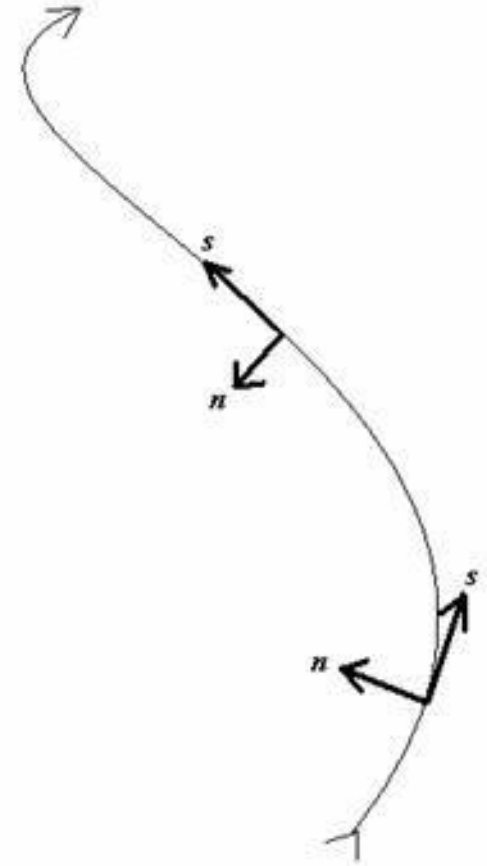
Równanie ruchu na pozioma składową prędkości:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f \vec{k} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

w tych składowych przybiera postać:

$$\text{składowa } s: \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s};$$

$$\text{składowa } n: \frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

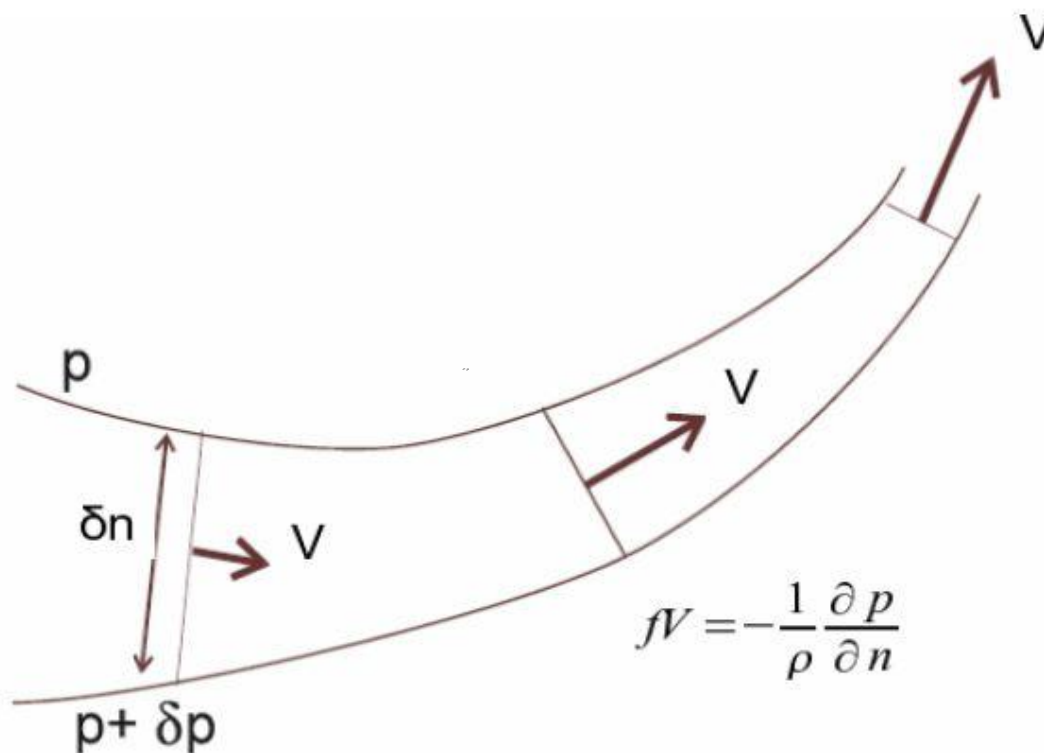


Dla ruchów wzdłuż izobar pierwsze równanie daje $V=const.$

Zajmijmy się teraz przypadkami szczególnymi.

1. Ruch geostroficzny: $R \rightarrow \infty$:

$$fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$



W miarę wzrostu gradientu ciśnienia rośnie prędkość przepływu.

Półkula północna: $f > 0$, praktyka pokazuje że

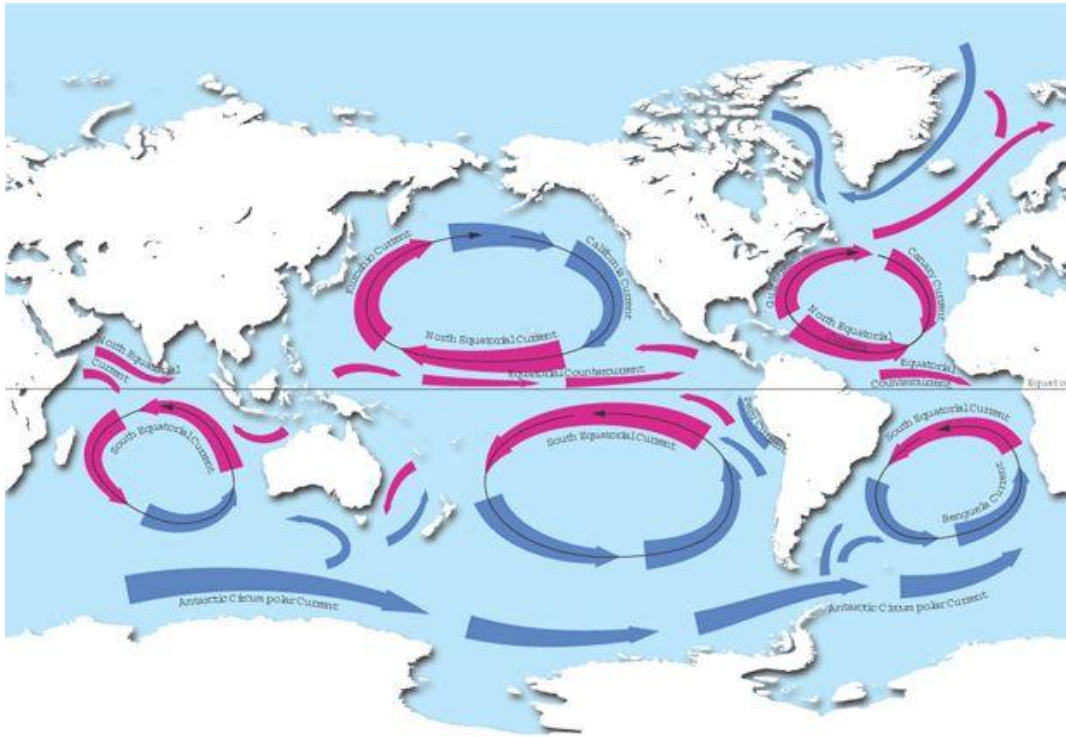
Na półkuli południowej znaki tych obu członów są przeciwne.

2. Ruch inercjalny - $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$:

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0$$

Stąd:

Przepływ jest antycykloniczny (na półkuli północnej $R < 0$).



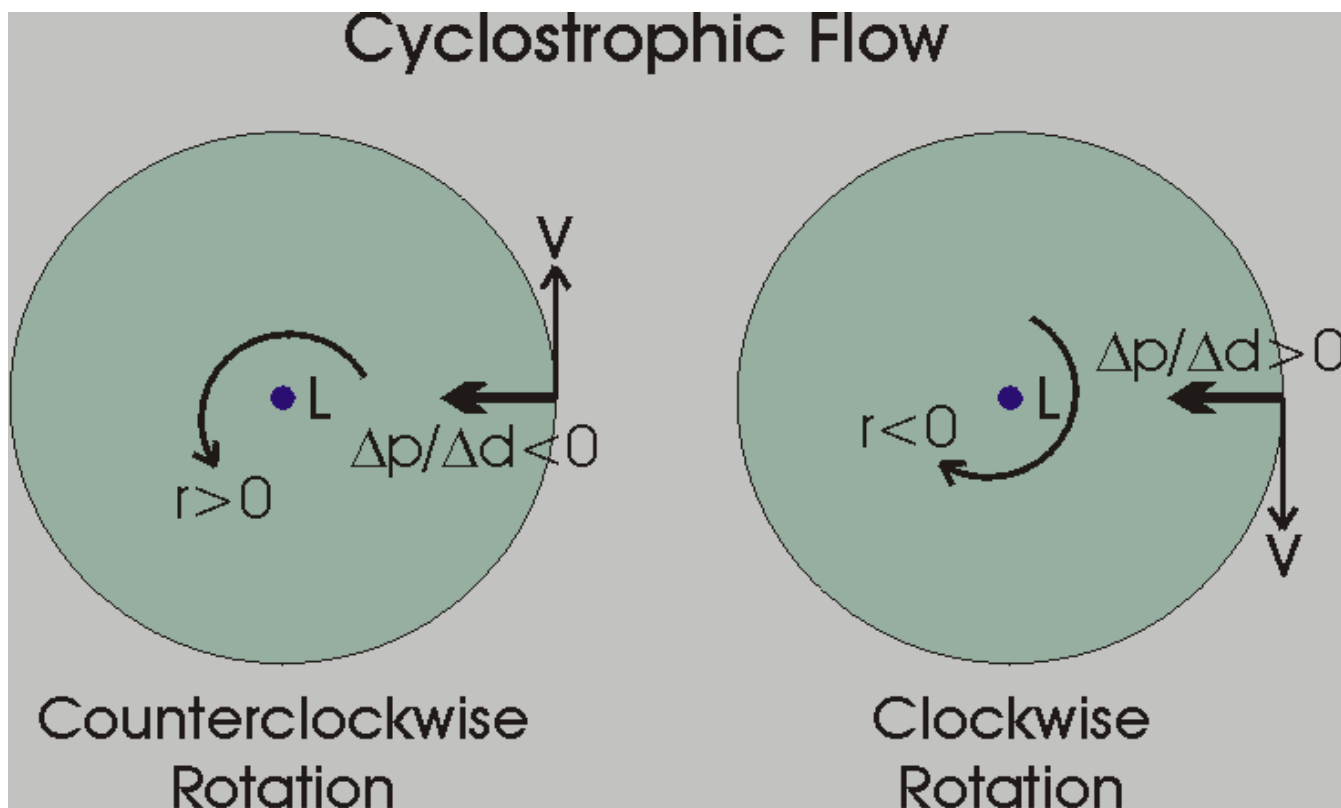
Surface Ocean Currents



3. Przepływ cyklostroficzny – siła Coriolisa zanedbywalnie mała w stosunku do gradientu ciśnienia i siły odśrodkowej (np. tornado, mieszanie herbaty):

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad V = \left(-\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2}$$

Przepływ może być albo cykloniczny, albo antycykloniczny: w zależności od znaku siły gradientu ciśnienia możemy mieć ruch zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

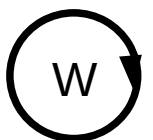
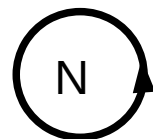
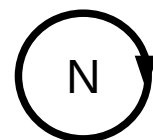


4. Przepływ gradientowy.

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2}$$

UWAGA: w zależności od kierunku zakrzywienia ruchu R jest dodatnie lub ujemne. Prędkość V musi być zawsze rzeczywista i dodatnia! Nie wszystkie rozwiązania są dopuszczalne!

$f > 0$



Znak R	Znak $\partial p / \partial n$	\pm	Rodzaj cyrkulacji	Ograniczenia
+	+	+/-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A
-	+	+	Anomalny niż	brak
		-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A
+	-	+	Niż	brak
		-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A
-	-	+	Anomalny wyż	$\left \frac{\partial p}{\partial n} \right \leq \frac{f^2 \rho}{4} R $
		-	Wyż	$\left \frac{\partial p}{\partial n} \right \leq \frac{f^2 \rho}{4} R $

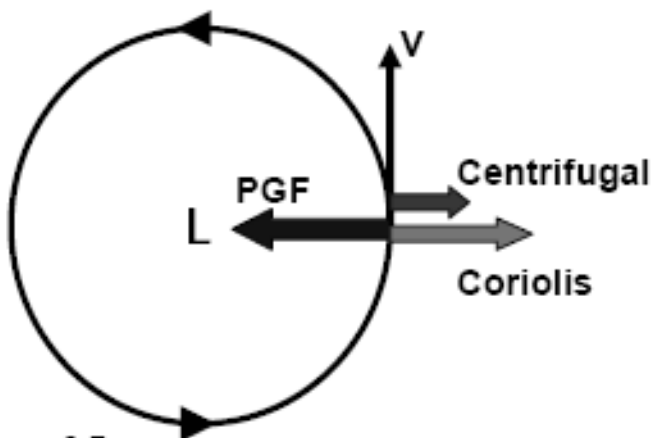
Wiruje antycyklonicznie, siły gradientu ciśnienia i Coriolisa mają ten sam zwrot – nierealizowalne fizycznie.

Wiruje cyklonicznie, siły gradientu ciśnienia i Coriolisa skierowane przeciwnie,

Wiruje antycyklonicznie, siły gradientu ciśnienia i Coriolisa skierowane przeciwnie.

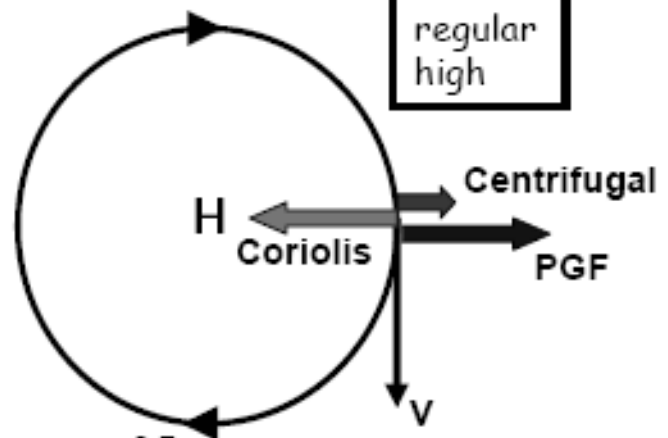
Wiruje antycyklonicznie, siły gradientu ciśnienia i Coriolisa skierowane przeciwnie.

regular low



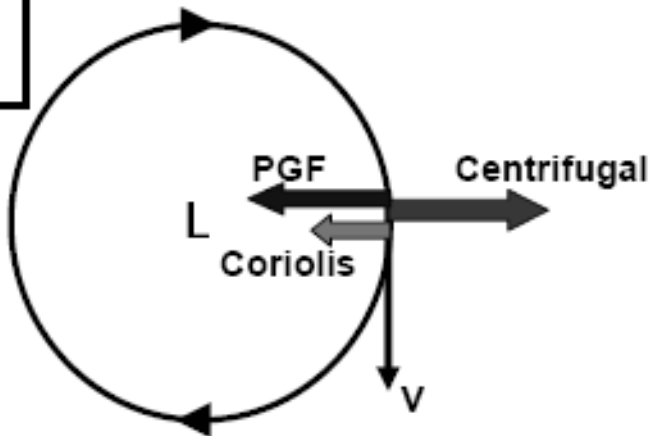
$R > 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0, \text{ negative root}$

regular high



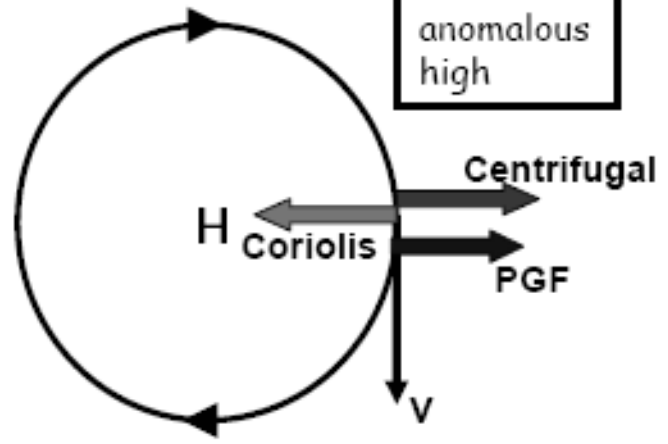
$R < 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0, \text{ positive root}$

anomalous low



$R < 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0, \text{ negative root}$

anomalous high



$R < 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0, \text{ negative root}$