

1100-4BW12, rok akademicki 2021/22

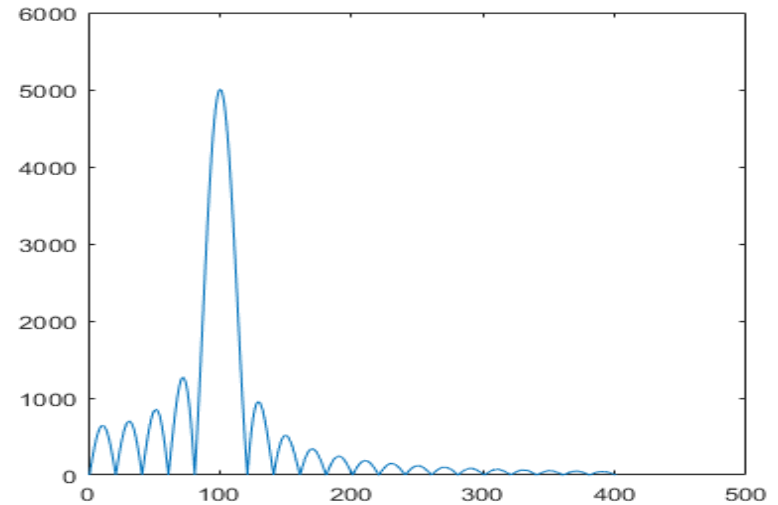
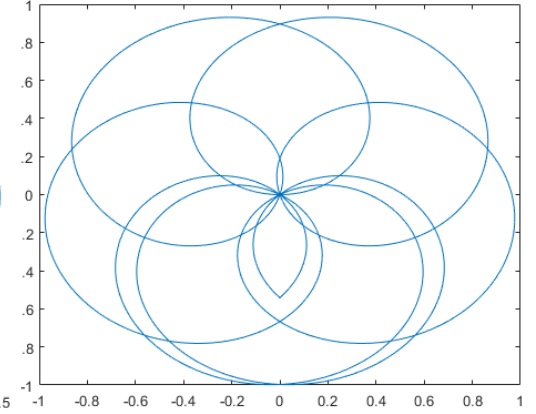
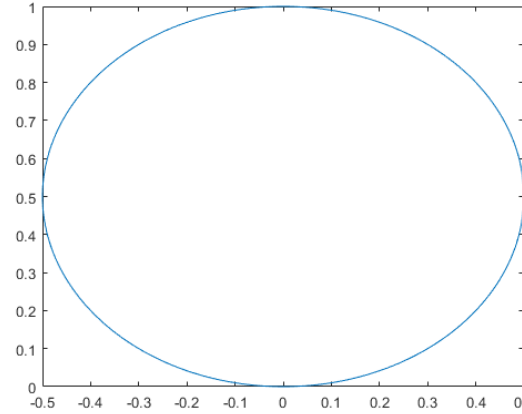
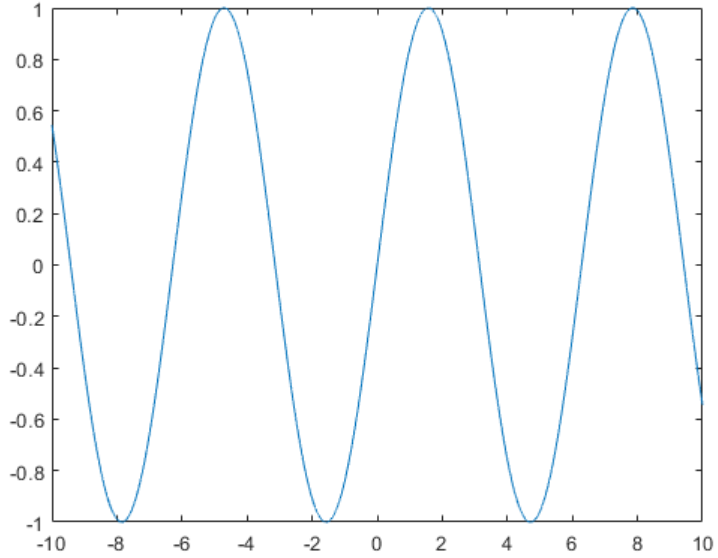
WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Wykład 3

Transformacja Fouriera

Analogia z centrum masy



Transformacja Fouriera 2D

$$F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$

transformata

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) \exp[i2\pi(xv_x + yv_y)] dv_x dv_y$$

transformata odwrotna

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(v_x, v_y)$$

Transformacja Fouriera 2D

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(v_x, v_y) \quad g(x, y) \Leftrightarrow G(v_x, v_y)$$

Właściwości:

Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = aF(v_x, v_y) + bG(v_x, v_y)$$

Twierdzenie o podobieństwie (skali):

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{v_x}{a}, \frac{v_y}{b}\right)$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F(v_x, v_y) \exp[-i2\pi(x_0v_x + y_0v_y)]$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \exp[i2\pi(xv_1 + yv_2)]\} = F(v_x - v_1, v_y - v_2)$$

Twierdzenie o wzajemności transformat:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{f(x, y)\} = f(-x, -y) \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{f(x, y)\} = f(x, y)$$

Transformacja Fouriera 2D

Twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes g(x, y)\} = F(v_x, v_y)G(v_x, v_y)$$

$$f(x, y) \star g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(v_x, v_y)G(v_x, v_y)\}$$

Twierdzenie o splocie w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)g(x, y)\} = F(v_x, v_y) \otimes G(v_x, v_y)$$

Twierdzenie o korelacji wzajemnej:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \star g^*(x, y)\} = F(v_x, v_y)G^*(v_x, v_y)$$

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \star f^*(x, y)\} = |F(v_x, v_y)|^2$$

Twierdzenie o mocy:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(v_x, v_y)|^2 dv_x dv_y$$

Transformacja Fouriera 2D

Pary transformat:

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(v_x, v_y)$$

$$\text{sgn}(x, y) = \text{sgn}(x)\text{sgn}(y) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi v_x} \frac{1}{i\pi v_y}$$

$$\text{rect}(x, y) = \text{rect}(x)\text{rect}(y) \Leftrightarrow \text{sinc}(v_x)\text{sinc}(v_y) = \text{sinc}(v_x, v_y)$$

$$\Lambda(x, y) = \Lambda(x)\Lambda(y) \Leftrightarrow \text{sinc}^2(v_x)\text{sinc}^2(v_y) = \text{sinc}^2(v_x, v_y)$$

$$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$$

$$\text{comb}(x, y) = \text{comb}(x)\text{comb}(y) \Leftrightarrow \text{comb}(v_x)\text{comb}(v_y) = \text{comb}(v_x, v_y)$$

$$\exp[i\pi(x + y)] \Leftrightarrow \delta\left(v_x - \frac{1}{2}, v_y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\exp[-\pi(x^2 + y^2)] \Leftrightarrow \exp[-\pi(v_x^2 + v_y^2)]$$

$$\text{circ}(r) = \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) \Leftrightarrow \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} = \frac{J_1(2\pi\sqrt{v_x^2 + v_y^2})}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

Transformacja Fouriera 2D

$$\operatorname{sgn}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-i\pi\nu_x x) d\nu_x = \frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

Transformacja Fouriera 2D

$$\text{sgn}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-i\pi\nu_x x) d\nu_x = \frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$$\text{rect}(x) \Leftrightarrow \text{sinc}(\nu_x)$$

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(x)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-i\pi\nu_x x) d\nu_x = \frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x} \Big|_{-1/2}^{1/2} =$$

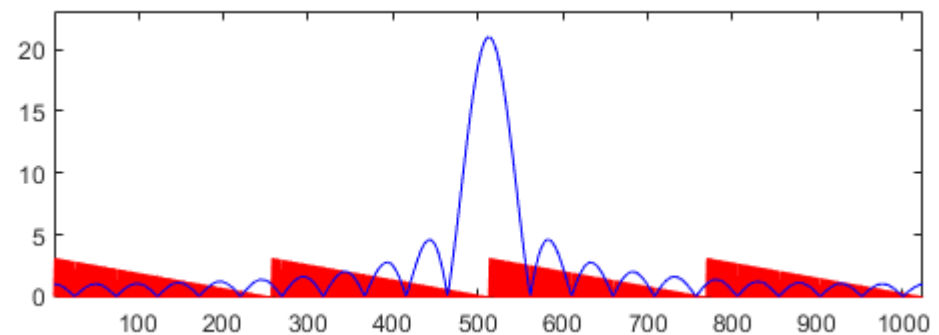
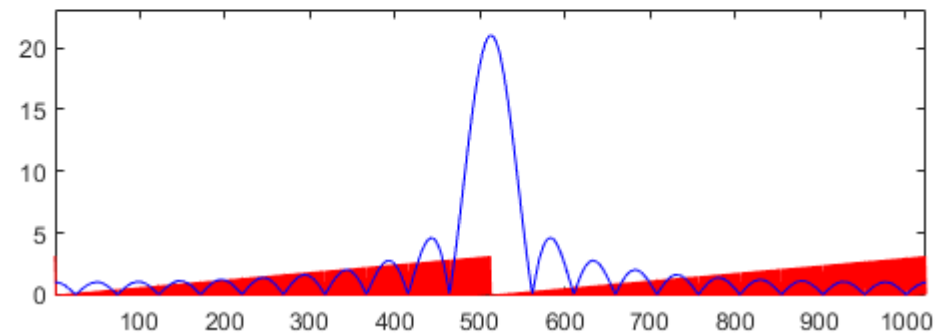
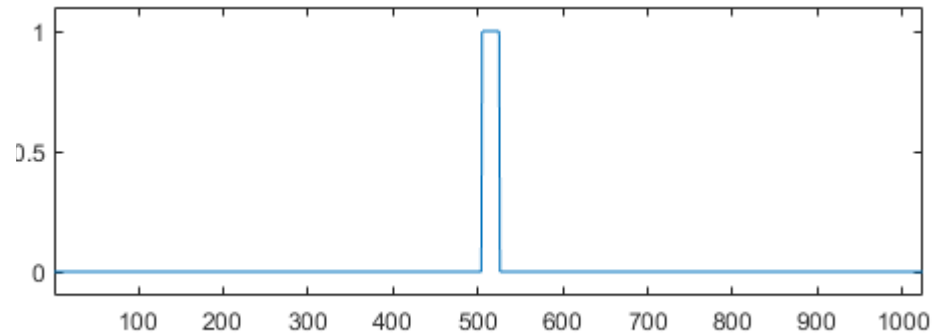
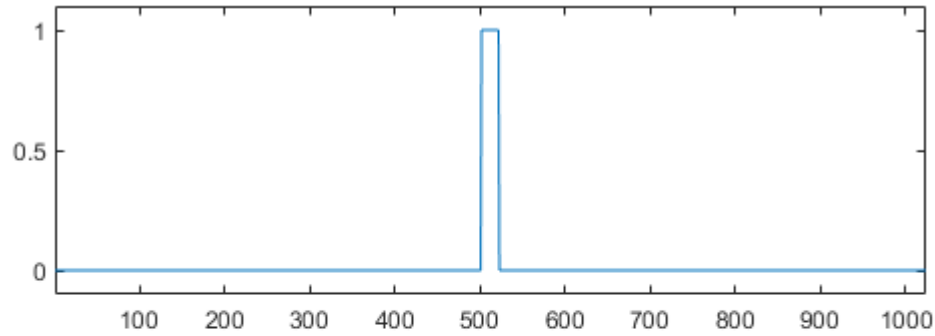
$$= \frac{1}{i\pi\nu_x} \left[\exp\left(\frac{i\pi\nu_x}{2}\right) - \exp\left(-\frac{i\pi\nu_x}{2}\right) \right] = \frac{2}{\pi\nu_x} \sin\left(\frac{\pi\nu_x}{2}\right)$$

Transformacja Fouriera 2D

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\pi\omega t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi\omega t) \exp(-i\pi\nu t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\pi\omega t) + \exp(-i\pi\omega t)] \exp(-i\pi\nu t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu - \omega)t] dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu + \omega)t] dt = \\ &= \pi\delta(\nu - \omega) + \pi\delta(\nu + \omega)\end{aligned}$$

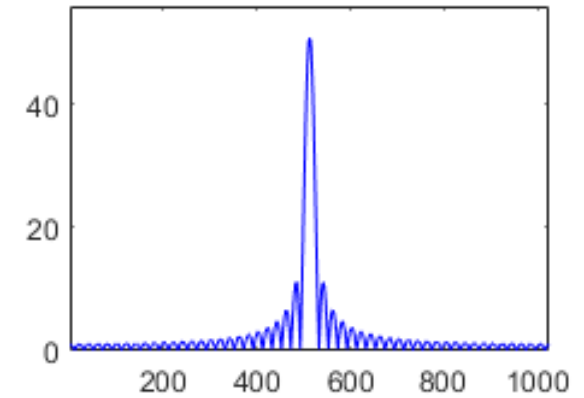
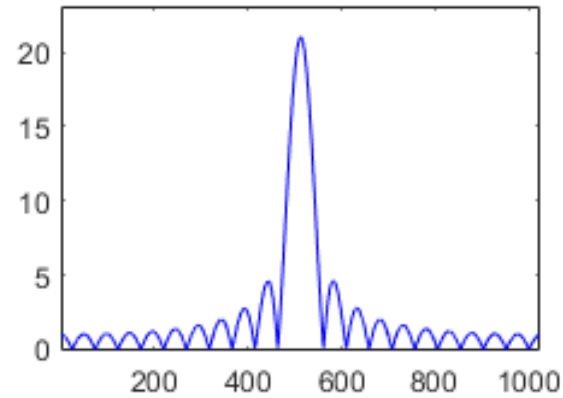
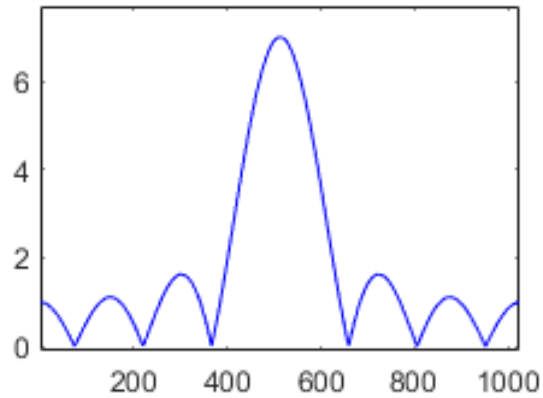
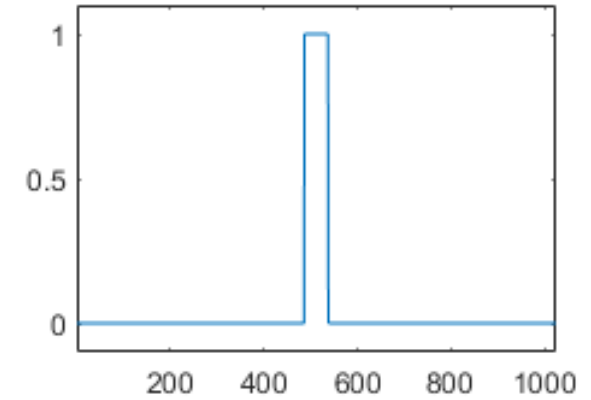
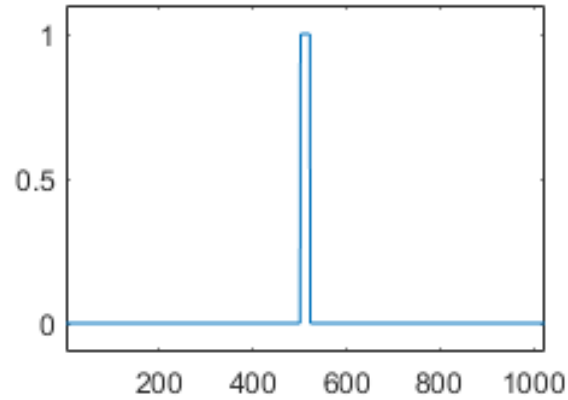
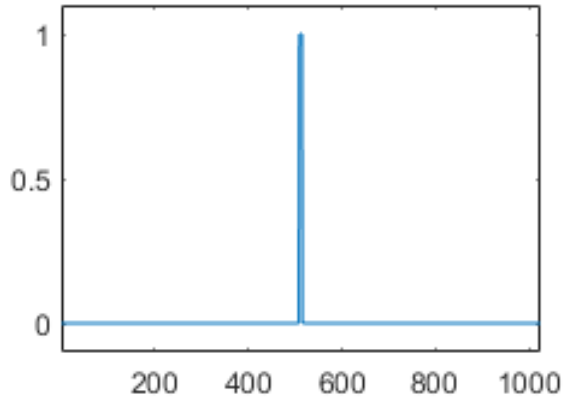
Transformacja Fouriera 2D

Przesunięcie - Faza:



Transformacja Fouriera 2D

Skalowanie szerokości:



Fourier.m
Gui_2_3.m
Gui_3_4.m

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = aF(v_x, v_y) + bG(v_x, v_y)$$

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = aF(v_x, v_y) + bG(v_x, v_y)$$

Ogólnie – własność liniowości:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{a_1f_1(x, y) + a_2f_2(x, y) + \dots + a_nf_n(x, y)\} = \\ = a_1\mathcal{L}\{f_1(x, y)\} + a_2\mathcal{L}\{f_2(x, y)\} + \dots + a_n\mathcal{L}\{f_n(x, y)\}\end{aligned}$$

Transformata Fouriera - Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = aF(v_x, v_y) + bG(v_x, v_y)$$

Ogólnie – własność liniowości:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{a_1f_1(x, y) + a_2f_2(x, y) + \dots + a_nf_n(x, y)\} &= \\ &= a_1\mathcal{L}\{f_1(x, y)\} + a_2\mathcal{L}\{f_2(x, y)\} + \dots + a_n\mathcal{L}\{f_n(x, y)\}\end{aligned}$$

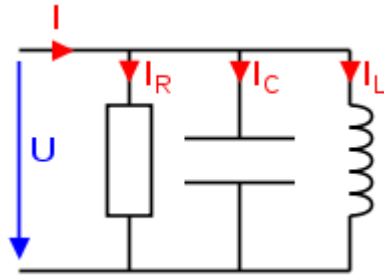
Własność filtracji:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$$

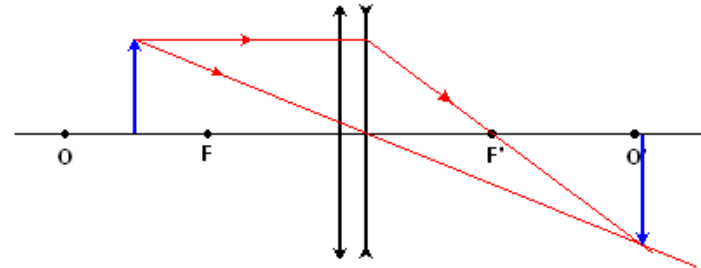
Wykład 1

$$f(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x_1 - x, y_1 - y) dx dy$$

Układy liniowe

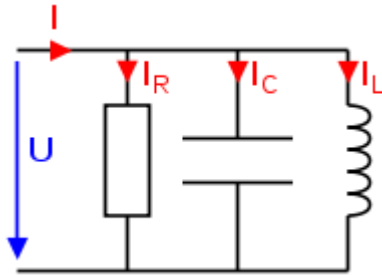


pl.wikipedia.org

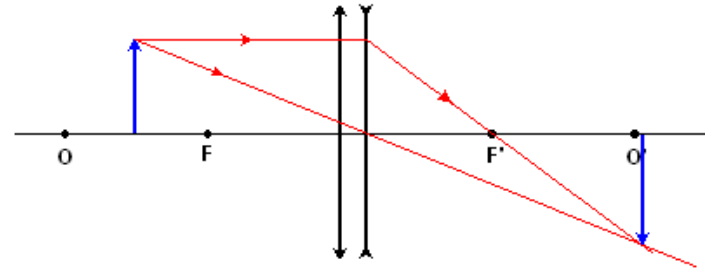


fizyka.edu.pl

Układy liniowe



pl.wikipedia.org



fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

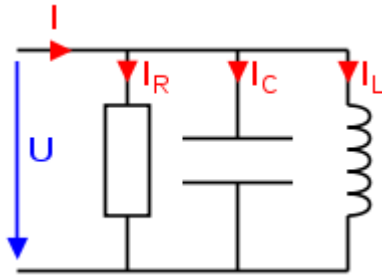
punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x_1 - x, y_1 - y) dx dy\right\}$$

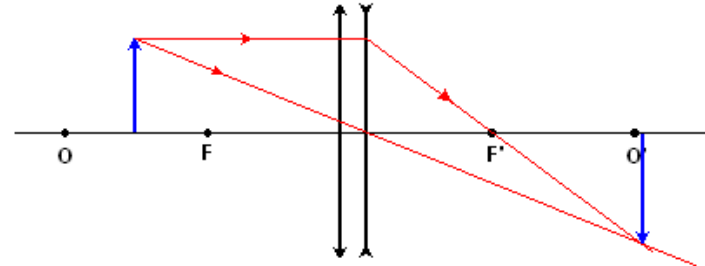
$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dx dy$$

$$h(x_2, y_2; x, y)$$

Układy liniowe



pl.wikipedia.org



fizyka.edu.pl

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\{f(x_1, y_1)\}$$

punktowe źródło światła

$$g(x_2, y_2) = \mathcal{L}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x_1 - x, y_1 - y) dx dy\right\}$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{\mathcal{L}\{\delta(x_1 - x, y_1 - y)\}}_{h(x_2, y_2; x, y)} dx dy$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dx dy$$

ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU

Odpowiedź impulsowa

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \underbrace{h(x_2, y_2; x, y)}_{\text{ODPOWIEDŹ IMPULSOWA UKŁADU}} dx dy$$

- Obraz punktu
- Plamka rozmycia (point-spread function)
- Obraz wyjściowy jest superpozycją obrazów poszczególnych punktów przedmiotu
- Funkcja h całkowicie charakteryzuje transformacyjne właściwości układu liniowego

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

Jest to splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Funkcja przenoszenia

Zakładam, że układ jest niezmienniczy przestrzennie – izoplanatyczny:

- Niezmienniczość ze względu na przesunięcie
- Stała skala

$$h(x_2, y_2; x, y) = h(x_2 - x, y_2 - y)$$

$$g(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(x_2 - x, y_2 - y) dx dy$$

Jest to spłot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową

$$g(x_2, y_2) = f(x, y) \otimes h(x_2, y_2)$$

Z twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes h(x, y)\} = F(v_x, v_y) \underbrace{H(v_x, v_y)} = G(v_x, v_y)$$

FUNKCJA PRZENOSZENIA UKŁADU

$$H(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(xv_x + yv_y)] dx dy$$

$H(v_x, v_y)$ jest filtrem częstości przestrzennych