WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

WYKŁAD 3

Transformacja Fouriera

Funkcję periodyczną można przedstawić jako sumę sinusów:

f(t)=$\sum_{k=1}^{n}[A_k \sin(2\pi\omega_k t + \pi/2) + B_k \sin(2\pi\omega_k t)]$

Wygodniej to przepisać jako sumę sinusa i cosinusa:

f(t)=$\sum_{k=1}^{n}[A_k \cos(2\pi\omega_k t) + B_k \sin(2\pi\omega_k t)]$

Np. dla funkcji:

$$f_1 = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + 2\sin(4\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

amplitudy

częstości

Transformacja Fouriera

Zapis zespolony funkcji trygonometrycznych:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \qquad e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi)=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin(\varphi)=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$$

Czyli $f(t)=\sum_{k=1}^{n}[A_k\cos(2\pi\omega_k t) + B_k\sin(2\pi\omega_k t)]$ mogę zapisać jako:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{A_k}{2}\left(e^{2\pi i\omega_k t}+e^{-2\pi i\omega_k t}\right) + \frac{B_k}{2}(e^{2\pi i\omega_k t}-e^{-2\pi i\omega_k t})\right]$$

Podstawiam:

$$C_k=\begin{cases} \frac{A_k-iB_k}{2} & dla \quad k>0 \\ \frac{A_k+iB_k}{2} & dla \quad k<0 \end{cases} \qquad \omega_k=\omega_{-k} \quad dla \quad k<0$$

Transformacja Fouriera

Dostaję:

$$f(t)=\sum_{k=-n}^{n}[C_k e^{2\pi i\omega_k t}]$$

Czyli nasza funkcja:

$$f_1 = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + 2\sin(4\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

k	Częstotliwość (ω_k)	C_k
3	2	1
2	1	2
1	1/2	1/4
0	0	0
-1	-1/2	-1/4
-2	-1	2
-3	-2	-1

Transformacja Fouriera

$$f_1 = \boxed{\frac{1}{2}\sin(\pi t)} + 2\sin(4\pi t) + 4\cos(2\pi t)$$

$$C_{-k}\exp[2\pi i\omega t] + C_k \exp[-2\pi i\omega t]$$

$$C_{-1}\exp[2\pi i\omega t] + C_1 \exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$C\exp[2\pi i\omega t] - C \exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\boxed{2C}\boxed{\left[\frac{\exp[2\pi i\omega t] - \exp[-2\pi i\omega t]}{2}\right]}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \sin(\pi t)$$

$$C = \frac{1}{4} \qquad \omega = \frac{1}{2}$$

k	Częstotliwość (ω_k)	C_k
3	2	1
2	1	2
1	1/2	1/4
0	0	0
-1	-1/2	-1/4
-2	-1	2
-3	-2	-1

Transformacja Fouriera

$$f_1 = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + 2\sin(4\pi t) + \boxed{4\cos(2\pi t)}$$

$$C_{-k}\exp[2\pi i\omega t] + C_k\exp[-2\pi i\omega t]$$

$$C_{-2}\exp[2\pi i\omega t] + C_2\exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$C\exp[2\pi i\omega t] + C\exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$\cos(\varphi)=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\boxed{2C}\boxed{\left[\frac{\exp[2\pi i\omega t] - \exp[-2\pi i\omega t]}{2}\right]}$$

4

$C = 2$

$\cos(2\pi t)$

$\omega = 1$

k	Częstotliwość (ω_k)	C_k
3	2	1
2	1	2
1	1/2	1/4
0	0	0
-1	-1/2	-1/4
-2	-1	2
-3	-2	-1

Transformacja Fouriera

$$f_1 = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + \boxed{2\sin(4\pi t)} + 4\cos(2\pi t)$$

$$C_{-k}\exp[2\pi i\omega t] + C_k\exp[-2\pi i\omega t]$$

$$C_{-3}\exp[2\pi i\omega t] + C_3\exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$C\exp[2\pi i\omega t] - C\exp[-2\pi i\omega t] =$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\boxed{2C}\boxed{\left[\frac{\exp[2\pi i\omega t] - \exp[-2\pi i\omega t]}{2}\right]}$$

$$2$$

$$\cos(4\pi t)$$

$$C = 1$$

$$\omega = 2$$

k	Częstotliwość (ω_k)	C_k
3	2	1
2	1	2
1	1/2	1/4
0	0	0
-1	-1/2	-1/4
-2	-1	2
-3	-2	-1

Transformacja Fouriera

Przechodzimy do funkcji ciągłej:

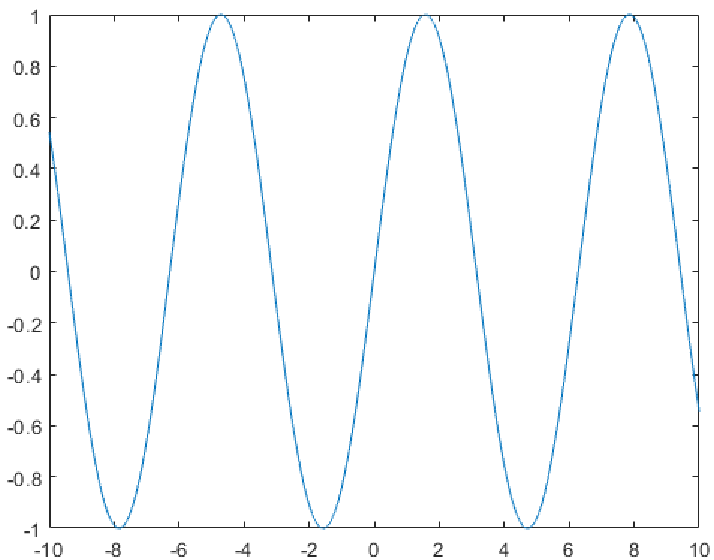
$f(\mathrm{t})=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega$ **ODWROTNA TRANSFORMATA FOURIERA**

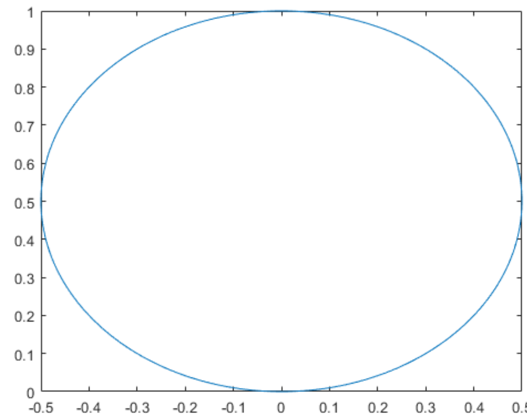
Składowe częstości ~ C_k

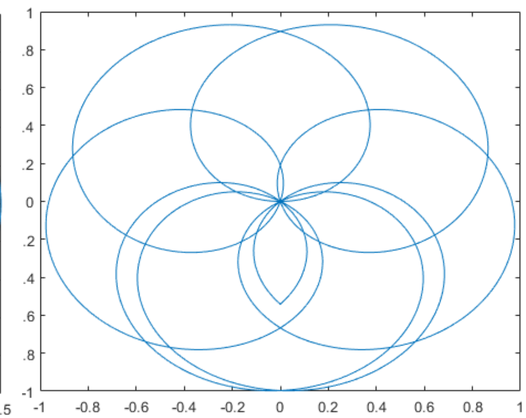
$F(\mathrm{t})=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{-2\pi i\omega t}\mathrm{d}\omega$ **TRANSFORMATA FOURIERA**

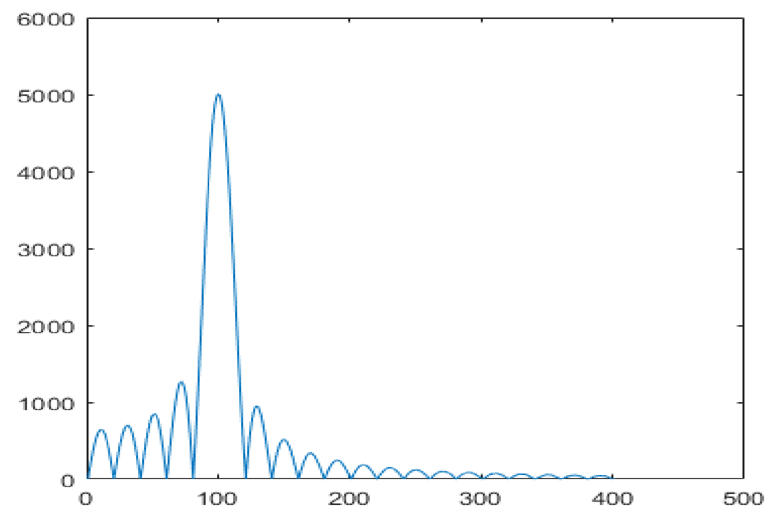
Transformacja Fouriera

Analogia z centrum masy









https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY (2:03 – 6:45) FourierMasa.m

Transformacja Fouriera 2D

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) exp[-i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, dx\, dy$$

transformata

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) exp[i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)]\, d\nu_x\, d\nu_y$$

transformata odwrotna

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(\nu_x, \nu_y)$$

Transformacja Fouriera 2D

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(\nu_x,\nu_y) \qquad g(x,y) \Leftrightarrow G(\nu_x,\nu_y)$$

Właściwości:

Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF\left(\nu_x,\nu_y\right) + bG(\nu_x,\nu_y)$$

Twierdzenie o podobieństwie (skali):

$$\mathcal{F}\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\nu_x}{a},\frac{\nu_y}{b}\right)$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F\left(\nu_x,\nu_y\right)\exp[-i2\pi(x_0\nu_x + y_0\nu_y)]$$

Twierdzenie o przesunięciu w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\exp[i2\pi(x\nu_1 + y\nu_2)\} = F\left(\nu_x - \nu_1, \nu_y - \nu_2\right)$$

Twierdzenie o wzajemności transformat:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{f(x,y)\} = f(-x,-y) \qquad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{f(x,y)\} = f(x,y)$$

Transformacja Fouriera 2D

Twierdzenie o splocie w przestrzeni położeń:

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \otimes g(x,y)\} = F(\nu_x,\nu_y)G(\nu_x,\nu_y)$$

$$f(x,y) \star g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu_x,\nu_y)G(\nu_x,\nu_y)\}$$

Twierdzenie o splocie w przestrzeni częstości:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)g(x,y)\} = F(\nu_x,\nu_y) \star G(\nu_x,\nu_y)$$

Twierdzenie o korelacji wzajemnej:

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \star g^*(x,y)\} = F(\nu_x,\nu_y)G^*(\nu_x,\nu_y)$$

$$\mathcal{F}\{f(x,y) \star f^*(x,y)\} = \left|F(\nu_x,\nu_y)\right|^2$$

Twierdzenie o mocy:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} \left|F(\nu_x,\nu_y)\right|^2 d\nu_x d\nu_y$$

Transformacja Fouriera 2D

Pary transformat:

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(\nu_x,\nu_y)$$

$$sgn(x,y) = sgn(x)sgn(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{i\pi\nu_x}\frac{1}{i\pi\nu_y}$$

$$\mathrm{rect}(x,y) = \mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sinc}(\nu_x)\mathrm{sinc}(\nu_y) = \mathrm{sinc}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\Lambda(x,y) = \Lambda(x)\Lambda(y) \quad \Leftrightarrow \quad sinc^2(\nu_x)sinc^2(\nu_y) = sinc^2(\nu_x,\nu_y)$$

$$\delta(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad 1$$

$$\mathrm{comb}(x,y) = \mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{comb}(\nu_x)\mathrm{comb}(\nu_y) = \mathrm{comb}(\nu_x,\nu_y)$$

$$\exp[i\pi(x+y)] \quad \Leftrightarrow \quad \delta\left(\nu_x - \frac{1}{2}, \nu_y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\exp[-\pi(x^2+y^2)] \quad \Leftrightarrow \quad \exp[-\pi({\nu_x}^2+{\nu_y}^2)]$$

$$\mathrm{circ(r)} = \mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho} = \frac{J_1(2\pi\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2})}{\sqrt{{\nu_x}^2+{\nu_y}^2}}$$

Fourier.m

Transformacja Fouriera 2D

$$sgn(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi \nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{sgn(x)\} = \int_0^\infty \exp(-i\pi \nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi \nu_x x)}{-i\pi \nu_x}\right|_0^\infty = \frac{1}{i\pi \nu_x}$$

Fourier.m

Transformacja Fouriera 2D

$$sgn(x) \Leftrightarrow \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$$\mathcal{F}\{sgn(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-i\pi\nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{i\pi\nu_x}$$

$\mathrm{rect}(x) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}(\nu_x)$

$$\mathcal{F}\{rect(x)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-i\pi\nu_x x)\, d\nu_x = \left.\frac{\exp(-i\pi\nu_x x)}{-i\pi\nu_x}\right|_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{i\pi\nu_x}\left[\exp\left(\frac{i\pi\nu_x}{2}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi\nu_x}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi\nu_x}\sin\left(\frac{\pi\nu_x}{2}\right)$$

Fourier.m

Transformacja Fouriera 2D

$$\mathcal{F}\{cos(\pi\omega t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi\omega t)\exp(-i\pi\nu t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\pi\omega t) + \exp(-i\pi\omega t)]\exp(-i\pi\nu t)\,dt =$$

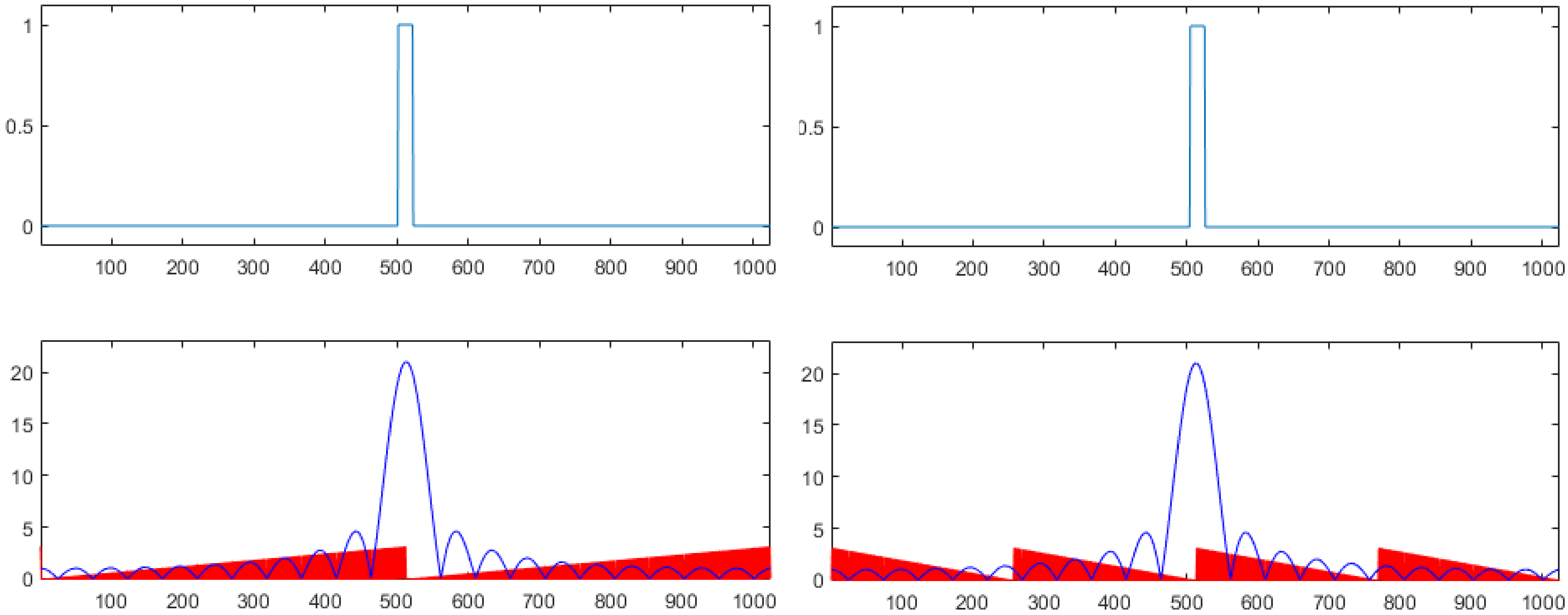
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu-\omega)t]dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\pi(\nu+\omega)t]dt =$$

$$= \pi\delta(\nu-\omega) + \pi\delta(\nu+\omega)$$

Fourier.m

Transformacja Fouriera 2D

Przesunięcie - Faza:



Fourier.m