

Przybliżenie hydrostatyczne.

Analizę skali można też przeprowadzić dla pionowej składowej równania ruchu:

P_0/H - aproksymacja pionowego gradientu ciśnienia.

P_0 - ciśnienie na powierzchni ziemi,

H - głębokość troposfery.

	A	B	C	D	E	F
z-owa składowa	$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega u \cos\phi$	$-\frac{(u^2 + v^2)}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$+ F_{tz}$
skale	$\frac{UW}{L}$	$f_0 U$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{P_0}{\rho H}$	g	vWH^{-2}
wielkości	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10	10	10^{-15}

Zdefiniujmy $p_0(z)$ i $\rho_0(z)$, typowe (normalne) rozkłady ciśnienia i gęstości z wysokością, które spełniają warunek równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} \equiv -g.$$

Całkowite pola ciśnienia i gęstości możemy zapisać jako:

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t),$$

gdzie p' i ρ' są odchyleniami od typowych wartości ciśnienia i gęstości.

Zakładając $\rho'/\rho_0 \ll 1$ tak, że $(\rho_0 + \rho')^{-1} \cong \rho_0^{-1}(1 - \rho'/\rho_0)$ znajdujemy:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \approx \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right).$$

Dla synoptycznej skali ruchów skale wyrażen w powyższym równaniu są następujące:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \sim \frac{\delta P}{\rho_0 H} \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-2}, \quad \frac{\rho' g}{\rho_0} \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-2}.$$

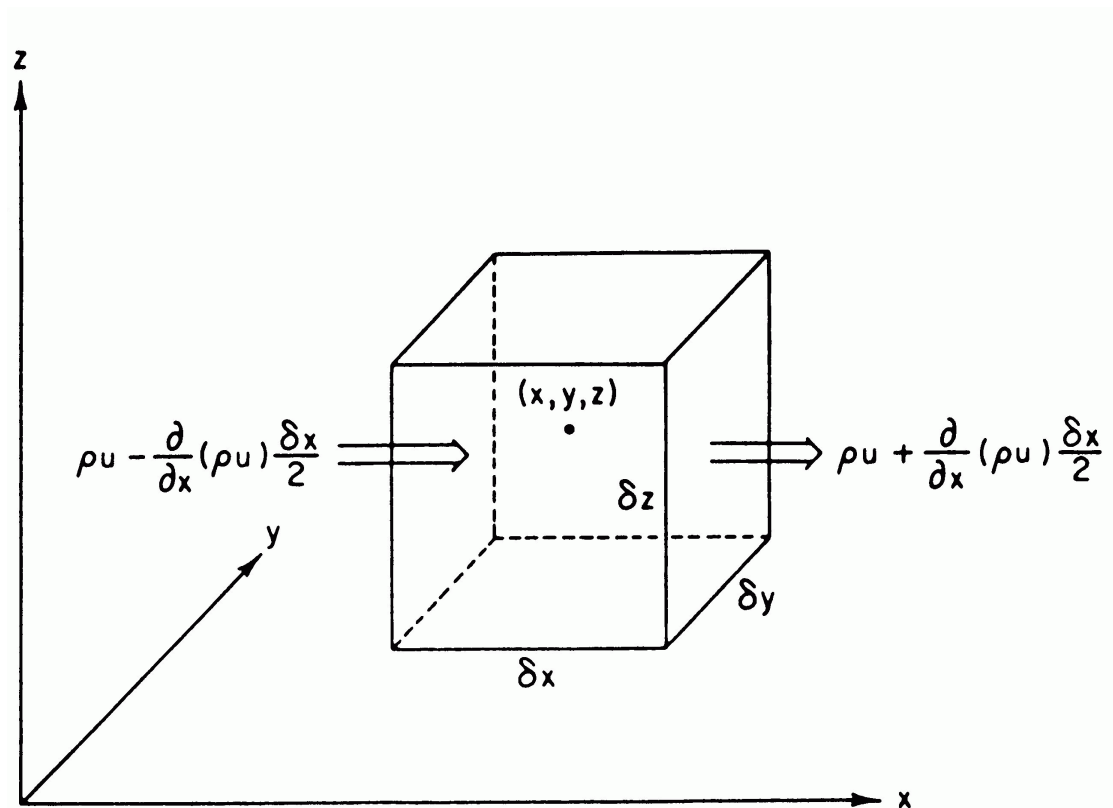
Porównując to z tabelą możemy zapisać:

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0.$$

Zauważmy, że pionowe przyspieszenia nie występują także dla odchylen pierwszego rzędu!

Równanie ciągłości.

Zajmiemy się teraz drugą z trzech fundamentalnych zasad zachowania, zasadą zachowania masy. Matematyczny związek wyrażający tę zasadę dla płynu jest nazwany równaniem ciągłości. Rozpatrzmy element objętości $\delta x \delta y \delta z$, ustalony we współrzędnych kartezjańskich:



Rozważmy przepływ masy w kierunku x . Przez lewą stronę wpływa:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z ,$$

podczas gdy przez prawą wypływa:

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z .$$

Wypadkowo więc w kierunku x przepływa:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z .$$

Podobne wyrażenia dostaniemy dla y i z składowej. Stąd cały przepływ wynosi:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z$$

$$\text{czyli } -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) .$$

To z kolei musi być równe przyrostowi masy na jednostkę objętości, czyli lokalnej zmianie gęstości $\partial \rho / \partial t$. Dlatego:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 .$$

Alternatywną formę równania ciągłości można otrzymać stosując tożsamość:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \equiv \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

i związek:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}.$$

W wyniku dostajemy:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0.$$

Dla równania ciągłości można przeprowadzić analizę skali.

Napiszmy:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right) + \frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \approx 0$$

A B C.

Tutaj ρ' oznacza lokalne odchylenie gęstości od jej normalnej wartości $\rho_0(z)$.

Dla synoptycznej skali ruchów $\rho'/\rho_0 \sim 10^{-2}$.

Wobec tego rząd wielkości składnika A można oszacować w następujący sposób:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \rho' \right) \sim \frac{\rho' U}{\rho_0 L} \approx 10^{-7} \text{ s}^{-1}.$$

Zauważmy, że skala głębokości H jest też skalą zmian gęstości w pionie, $d \ln \rho_0 / dz \sim H^{-1}$, stąd rząd wielkości wyrazu B to:

$$\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \sim \frac{W}{H} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Rozwijając wyraz C we współrzędnych kartezjańskich dostajemy:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

W skali synoptycznej wyrażenia $\partial u / \partial x$ i $\partial v / \partial y$ niemal się równoważą, ich suma jest co najmniej o rząd wielkości mniejsza od każdego z nich:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-1} \frac{U}{L} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

taką samą wartość przyjmuje dywergencja prędkości pionowej:

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{H} \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Stąd widać, że wyrazy B i C są o rząd wielkości większe niż wyraz A i dlatego:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{d}{dz} (\ln \rho_0) = 0$$

lub formie wektorowej: $\vec{\nabla} \cdot \left(\rho_0 \vec{U} \right) = 0.$

Równanie energii termodynamicznej.

Przejdziemy do trzeciej fundamentalnej zasady zachowania, zachowania energii. Pierwsza zasada termodynamiki mówi, że zmiana energii wewnętrznej układu jest równa różnicy pomiędzy ciepłem dodanym do układu i pracy wykonanej przez układ. W przypadku atmosfery układem termodynamicznym może być lagranżowski element objętości, tzw. cząstka powietrza.

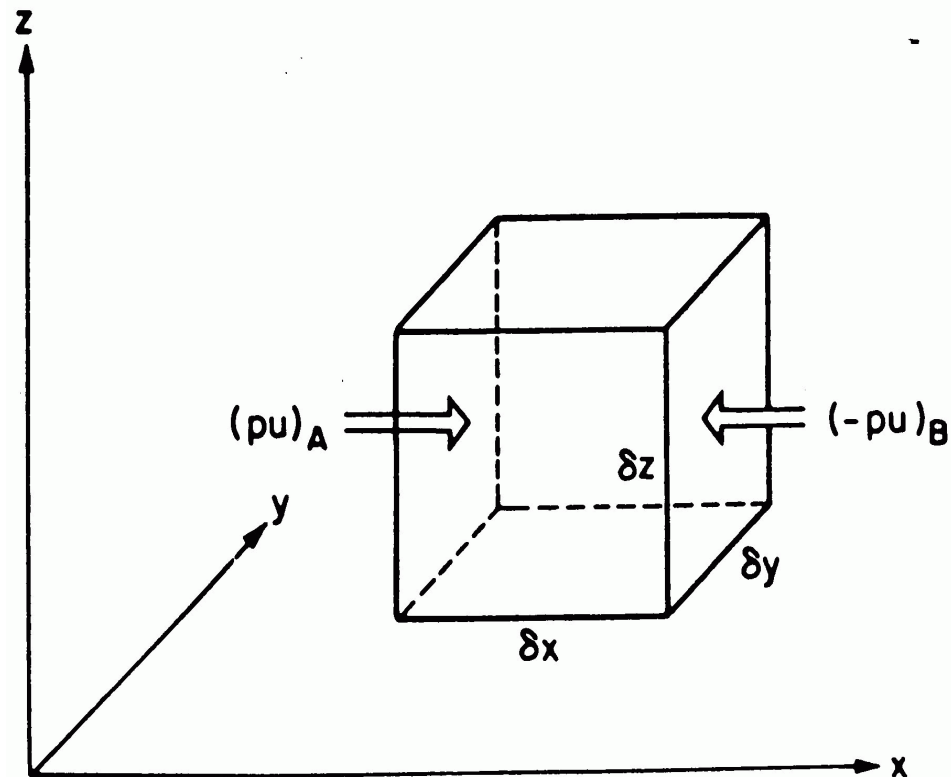
Zapiszmy całkowitą energię termodynamiczną od elementu objętości jako sumę energii wewnętrznej i energii kinetycznej należącej do makroskopowych ruchów płynu. Szybkość zmian tej całkowitej energii termodynamicznej jest równa sumie szybkości diabatyicznego nagrzewania i szybkości pracy wykonanej nad elementem płynu przez siły zewnętrzne.

Jeśli przez e oznaczymy energię wewnętrzną na jednostkę masy, wtedy całkowita energia termodynamiczna cząstki powietrza o gęstości ρ i objętości δV wynosi

$$\rho \left[e + (1/2) \vec{U} \cdot \vec{U} \right] \delta V .$$

Siły zewnętrzne działające na płyn mogą być podzielone na siły powierzchniowe (gradient ciśnienia i tarcie) i siły masowe („gravity” i siła Coriolisa).

Tempo z którym x -owa składową siły gradientu ciśnienia wykonuje nad płynem jest zilustrowana na rysunku poniżej.



Tempo, z którym siła wykonuje pracę jest dana przez iloczyn skalarny siły i wektora prędkości. Wobec tego tempo, z którym otoczenie wykonuje pracę nad elementem płynu przez siły ciśnienia działającego na dwie granice powierzchni w płaszczyźnie $y z$ wynosi:

$$(\rho u)_A \delta y \delta z - (\rho u)_B \delta y \delta z .$$

Rozwijając to w szereg Taylora możemy napisać:

$$(pu)_B = (pu)_A + \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu) \right]_A \delta x + \dots$$

Stąd: $\left[(pu)_A - (pu)_B \right] \delta y \delta z = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu) \right]_A \delta V$, gdzie $\delta V = \delta x \delta y \delta z$.

Podobnie jest dla y i z składowej ruchu:

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y}(pv) \right] \delta V \quad \text{i} \quad - \left[\frac{\partial}{\partial z}(pw) \right] \delta V.$$

Stąd dla wszystkich składowych ciśnienia możemy napisać: $-\vec{\nabla} \cdot (p\vec{U}) \delta V$.

Obliczmy jeszcze tempo w jakim pracę nad naszą cząstką wykonują siły masowe. Siła Coriolisa jako prostopadła do prędkości nie wykonuje pracy, lepkość jest zanedbywalnie mała w przybliżeniu w którym pracujemy. Pozostaje tylko działanie gravity wyrażające się zależnością $\rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V$.

Stosując zasadę zachowania energii do cząstki powietrza (zaniedbując, jak wspomniano, lepkość) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \delta V \right] = -\vec{\nabla} \cdot (p\vec{U}) \delta V + \rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V + \rho J \delta V.$$

J jest tutaj szybkością dopływu (odpływu) ciepła na jednostkę masy.

Ciepło może dopływać wskutek pochłaniania promieniowania, przewodnictwa z otoczenia czy zachodzących w cząstce przemian fazowych (ciepło utajone).

Z pomocą wzoru na pochodną funkcji złożonej powyższe równanie możemy przepisać jako:

$$\rho \delta V \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) + \left(e + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \frac{d(\rho \delta V)}{dt} = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p \delta V - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \delta V - \rho g w \delta V + \rho J \delta V ,$$

gdzie $\vec{g} = g \vec{k}$.

Drugi wyraz po lewej stronie równania znika (zachowanie masy), więc:

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} - \rho g w + \rho J .$$

Jeśli równanie ruchu pomnożymy skalarnie przez \vec{U} , to zaniedbując tarcie otrzymamy:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p - \rho g w .$$

Z powyższych dwóch równań dostajemy:

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \rho J .$$

Wyrazy usunięte przez to odejmowanie przedstawiają bilans energii mechanicznej ruchu elementu płynu, a wyrazy pozostałe przedstawiają bilans energii cieplnej.

Używając definicji geopotencjału mamy:

$$g_w = g \frac{dz}{dt} = \frac{d\Phi}{dt},$$

więc możemy napisać:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} + \Phi \right) = -\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p.$$

Zależność ta jest znana pod nazwą równania energii mechanicznej. Równanie to pokazuje, że tempo zmian energii mechanicznej na jednostkę objętości zależy od pracy siły gradientu ciśnienia.

Równanie energii cieplnej może być napisane w bardziej znajomej formie:

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

i dla suchego powietrza energia wewnętrzna na jednostkę masy jest dana przez $e = c_v T$ gdzie c_v ($=717 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) jest ciepłem właściwym przy stałej objętości.

W ten sposób otrzymamy:

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = J ,$$

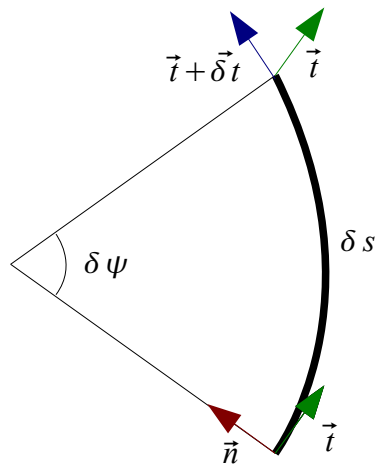
co jest zwykłą formą równania energii termodynamicznej.

W przypadku adiabatycznym $J = 0$ i równania ruchu, ciągłości i energii termodynamicznej uzupełnione równaniem stanu gazu doskonałego stanowią zamknięty układ równań (tzw. równania pierwotne, ang. "primitive equations").

Przepływy zrównoważone (ang. “Balanced flows”).

Przepływy atmosferyczne i oceaniczne zależą od następujących sił: siły ciężkości (gravity), siły gradientu ciśnienia, siły Coriolisa, siły tarcia oraz, w przypadku ruchu po krzywej od siły odśrodkowej.

Przepływy zrównoważone to takie, dla których siły działające na cząstkę powietrza się równoważą. W takim wypadku nie ma przyspieszeń i mamy do czynienia z przepływami stacjonarnymi. Ze względu na bardzo dobre zrównoważenie siły ciężkości przez pionową składową gradientu ciśnienia (równowaga hydrostatyczna) będziemy rozważać tylko zrównoważone przepływy w poziomie (wiatr).



Przepływy zrównoważone badać będziemy w tzw. naturalnym układzie współrzędnych.

Współrzędna s (styczna, wektor \vec{t}) jest w tym układzie skierowana wzdłuż wektora prędkości, a współrzędna normalna n (wektor \vec{n} skierowana w lewo pod kątem prostym do współrzędnej s).

$$\vec{V} = V \vec{t}, V = \frac{ds}{dt}, |\vec{t}| = 1$$

$$\delta \psi = \frac{\delta s}{R} = |\delta \vec{t}|, R > 0 \text{ dla lewoskrętnego}, R < 0 \text{ dla prawoskrętnego}$$

$$\delta \vec{t} \parallel \vec{n}, \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} V, \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V \vec{t}) = \frac{dV}{dt} \vec{t} + V \frac{d\vec{t}}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + V^2 \frac{\vec{n}}{R}$$

Równanie ruchu na pozioma składową prędkości:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

w tych składowych przybiera postać:

$$\text{składowa s: } \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s};$$

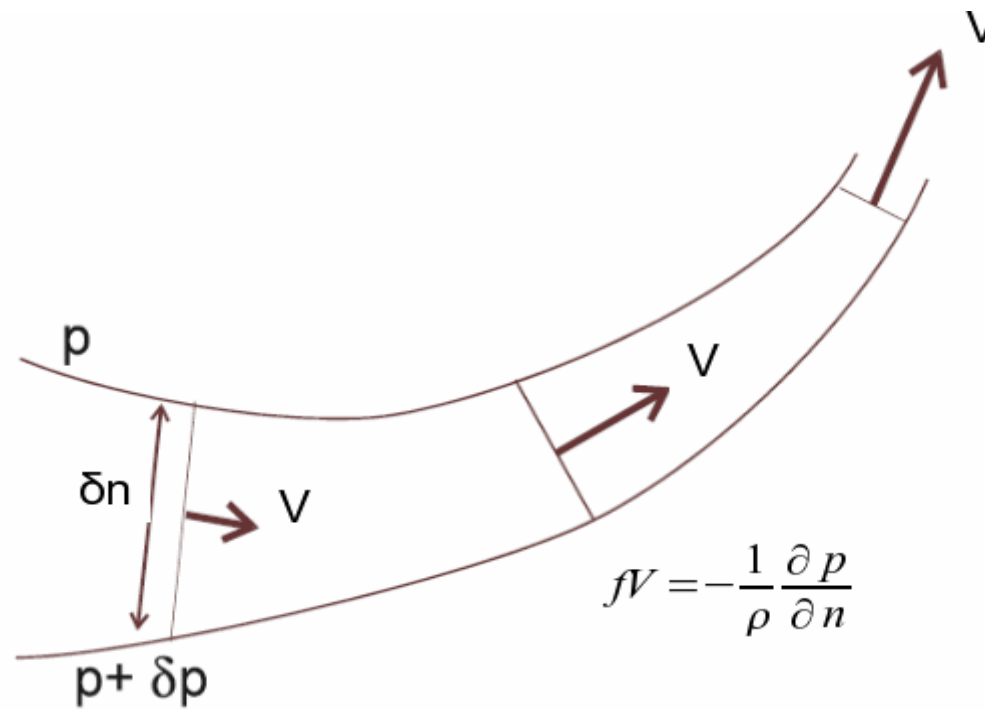
$$\text{składowa n: } \frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

Dla ruchów wzdłuż izobar pierwsze równanie daje $V = \text{const}$.

Zajmijmy się teraz przypadkami szczególnymi.

1. Ruch geostroficzny: $R \rightarrow \infty$:

$$fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$



W miarę wzrostu gradientu ciśnienia rośnie prędkość przepływu.

2. Ruch inercjalny - $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$:

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0$$

3. Przepływ cyklostroficzny – siła Coriolisa zanedbywalnie mała w stosunku do gradientu ciśnienia i siły odśrodkowej (np. tornado, mieszanie herbaty):

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad V = \left(-\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2}$$

4. Przepływ gradientowy.

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2} .$$

UWAGA: w zależności od kierunku zakrzywienia ruchu R jest dodatnie lub ujemne. Prędkość V musi być zawsze rzeczywista i dodatnia! Nie wszystkie rozwiązania są dopuszczalne!

Znak R	Znak $\partial p/\partial n$	\pm	Rodzaj cyrkulacji	Ograniczenia	Orientacja sił
+	+	+/-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A	
-	+	+	Anomalny niż	brak	Sily gradientu ciśnienia i Coriolisa skierowane przeciwnie do siły odśrodkowej.
		-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A	
+	-	+	Niż	brak	Siła gradientu ciśnienia i skierowana przeciwnie do siły Coriolisa i siły odśrodkowej.
		-	Niedopuszczalny fizycznie	N/A	
-	-	+	Anomalny wyż	$ \frac{\partial p}{\partial n} \leq \frac{f^2 \rho}{4} R $	Siła Coriolisa skierowana przeciwnie do siły gradientu ciśnienia i siły odśrodkowej.
		-	Wyż	$ \frac{\partial p}{\partial n} \leq \frac{f^2 \rho}{4} R $	Siła Coriolisa skierowana przeciwnie do siły gradientu ciśnienia i siły odśrodkowej.

6 Wiatr geostroficzny i wiatr gradientowy

Równanie wiatru geostroficznego we współrzędnych naturalnych:

f - parametr
Corriolisa

$$V_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Równanie wiatru gradientowego:

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Porównując ze sobą powyższe równania dostaniemy:

$$\frac{V^2}{R} + fV - fV_g = 0$$

Prędkość wiatru geostroficznego w stosunku do wiatru gradientowego :

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR}$$

- dla normalnego przepływu cyklonicznego: $fR > 0$ i $V_g > V$
- dla przepływu antycyklonicznego: $fR < 0$ i $V_g < V$

7 Liczba Rossby'ego

LICZBA ROSSBY'EGO to stosunek przyspieszenia spowodowanego siłą odśrodkową do przyspieszenia Coriolisa:

$$R_0 = \frac{\left| \frac{V^2}{R} \right|}{|fV|} = \frac{V}{fR}$$

8 Wiatr termiczny

WIATR TERMICZNY jest zdefiniowany jako zmiana pionowa wiatru geostroficznego wraz z wysokością. WIATR TERMICZNY jest prostopadły do poziomej składowej gradientu temperatury, obszar chłodniejszy pozostaje po lewej stronie wektora wiatru termicznego.

Równanie WIATRU TERMICZNEGO:

$$v_T = -\frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} (\vec{k} \times \vec{\nabla} T) d(\ln p) = -\frac{R}{f} (\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{T}) \ln \frac{p_1}{p_0}$$

R - stała gazowa
 \bar{T} - średnia temperatura warstwy

8.1 Wyprowadzenie

$$p_1 < p < p_0$$

Za punkt wyjścia przyjmijmy równania wiatru geostroficznego (\vec{u}_g, \vec{v}_g):

$$v_g = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p$$

$$u_g = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$$

Na obie strony tych równań podziałajmy operatorem $p \frac{\partial}{\partial p}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} \equiv -\frac{RT}{p}$$

$$p \frac{\partial v_g}{\partial p} = \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = \frac{p}{f} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p = \frac{p}{f} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{p}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{RT}{p} \right)$$

Zatem

$$p \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$$

$$p \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$$

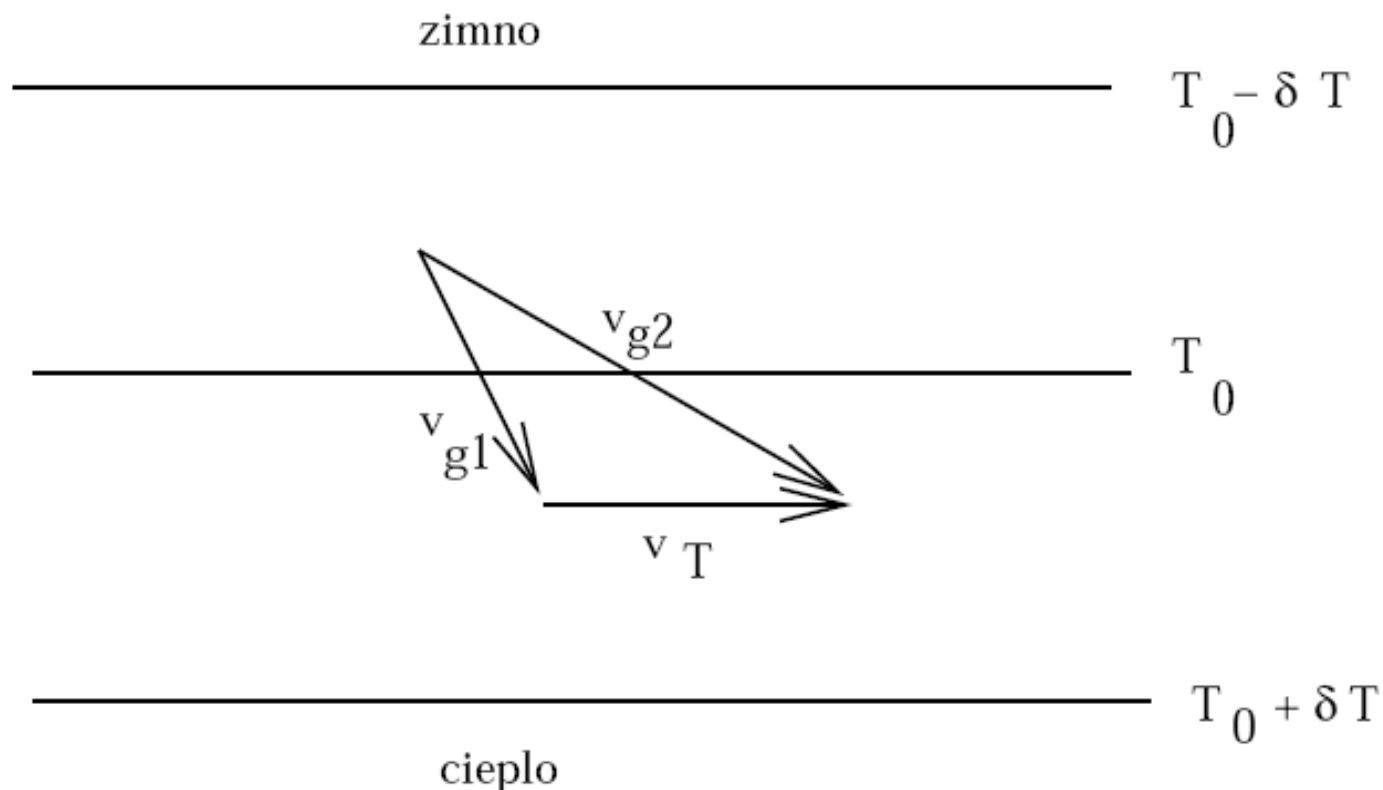
W postaci wektorowej:

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \hat{k} \times \vec{\nabla}_p T$$

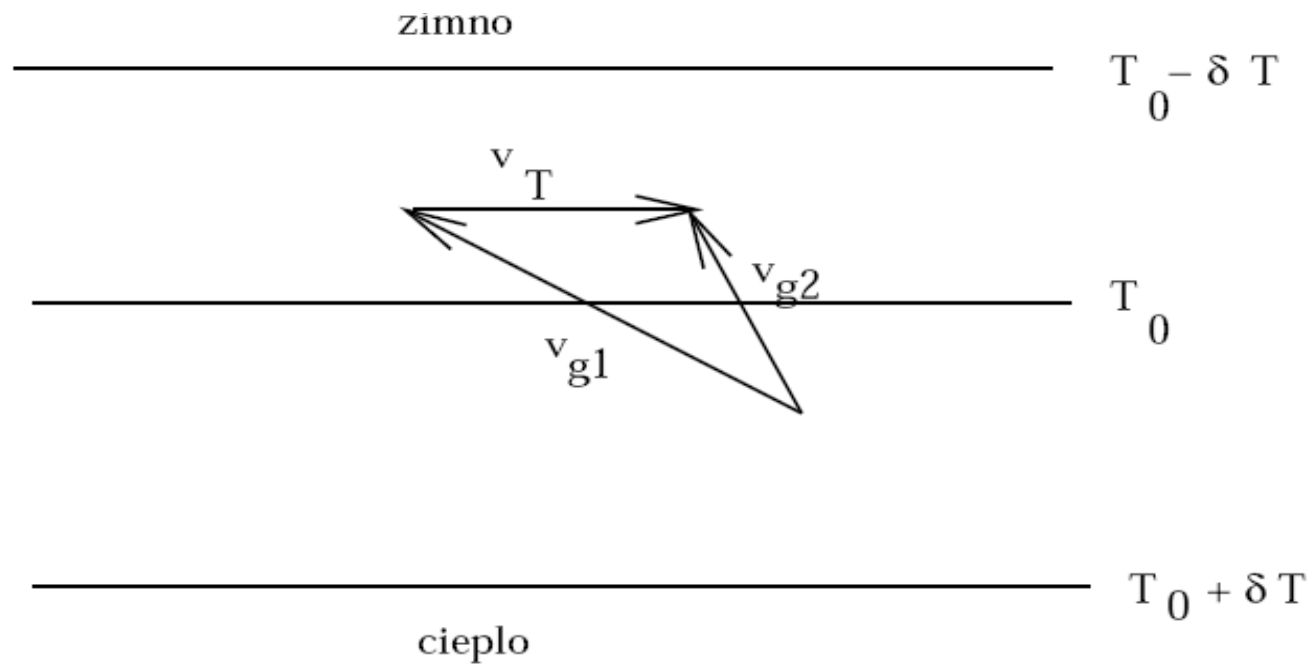
WIATR TERMICZNY:

$$\vec{V}_T = \vec{V}_g(p_1) - \vec{V}_g(p_2) = -\frac{R}{f} \int_{p_1}^{p_2} (\hat{k} \times \vec{\nabla}_p T) d \ln p = -\frac{R}{f} (\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{T}) \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Wektor wiatru termicznego jest skierowany równoległe do izoterm i obszar ciepłego powietrza ma zawsze po prawej stronie.



Wiatr termiczny może być użyty do prognozy poziomej adwekcji temperatury i jej zmiany z wysokością na podstawie jednego sondażu. Na przykład na rysunku powyżej widać, że skoro wiatr geostroficzny (v_{g1} niżej od v_{g2}) skręca w lewo (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) wraz ze wzrostem wysokości, to wiatr będzie przynosił powietrze z obszaru chłodnego.



Tu sytuacja jest odwrotna, wiatr skręca zegarowo z wysokością, więc będzie adwekcja powietrza ciepłego .

Podobnie, w drugą stronę, na podstawie zmiany średniej temperatury z wysokością można wnioskować o zmianie wiatru geostroficznego z wysokością.

Składowe:

$$u_T = -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_p \ln \frac{p_0}{p_1} = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 - \Phi_0)$$

$$v_T = \frac{R}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right)_p \ln \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 - \Phi_0)$$

\bar{T} - średnia temperatura pomiędzy warstwami p_0 i p_1