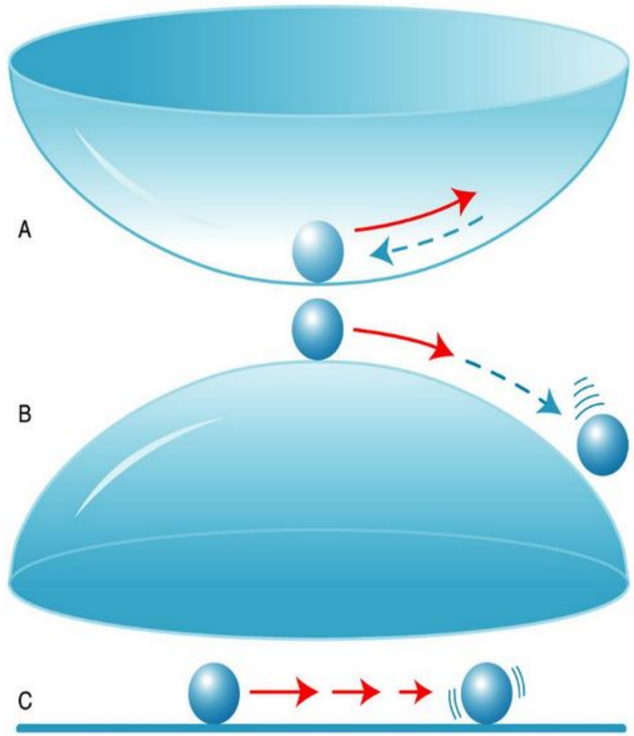


Fizyka Pogody i Klimatu
Stabilność hydroststyczna

Szymon, Malinowski, Krzysztof Markowicz, Hanna Pawłowska
Instytut Geofizyki
Uniwersytet Warszawski

- Rozpatrujemy pionowe przesunięcia płynu, który jest w równowadze hydrostatycznej
- Cząstka powietrza poruszająca się pionowo w płynie jest poddawana sprężaniu lub rozprężaniu adiabatycznemu; zatem jej temperatura ulega zmianie
- Ruch pionowy cząstki powoduje, że może się stać cieplejsza lub chłodniejsza od otoczenia.
- Działa na nią siła Archimedesa (wyporu)
- Jeśli siła wyporu jest zgodna z kierunkiem ruchu - płyn niestabilny,
- Siła wyporu przeciwnie skierowana do kierunku ruchu – płyn stabilny,
- Brak siły wyporu - równowaga neutralna

Rozważmy małą masę, lub cząstkę, która będzie się poruszała w nieruchomym płynie będącym w równowadze hydrostatycznej

Następujące założenia stosowane są w metodzie cząstki:

- Cząstka zachowuje swoją integralność; nie miesza się z otoczeniem
- Ruch cząstki nie zaburza otoczenia, w którym się ruch odbywa
- Ciśnienie w cząstce dostosowuje się natychmiast do ciśnienia zewnętrznego
- Cząstka porusza się w sposób izentropowy (przemiana adiabatyczna); jej temperatura potencjalna pozostaje stała

Statyczna stabilność atmosfery jest ważna w wyjaśnianiu i przewidywaniu:

- Konwekcji cumulusowej oraz groźnych burz
- Opadu
- Turbulencji w warstwie granicznej
- Dynamiki atmosfery w dużej skali

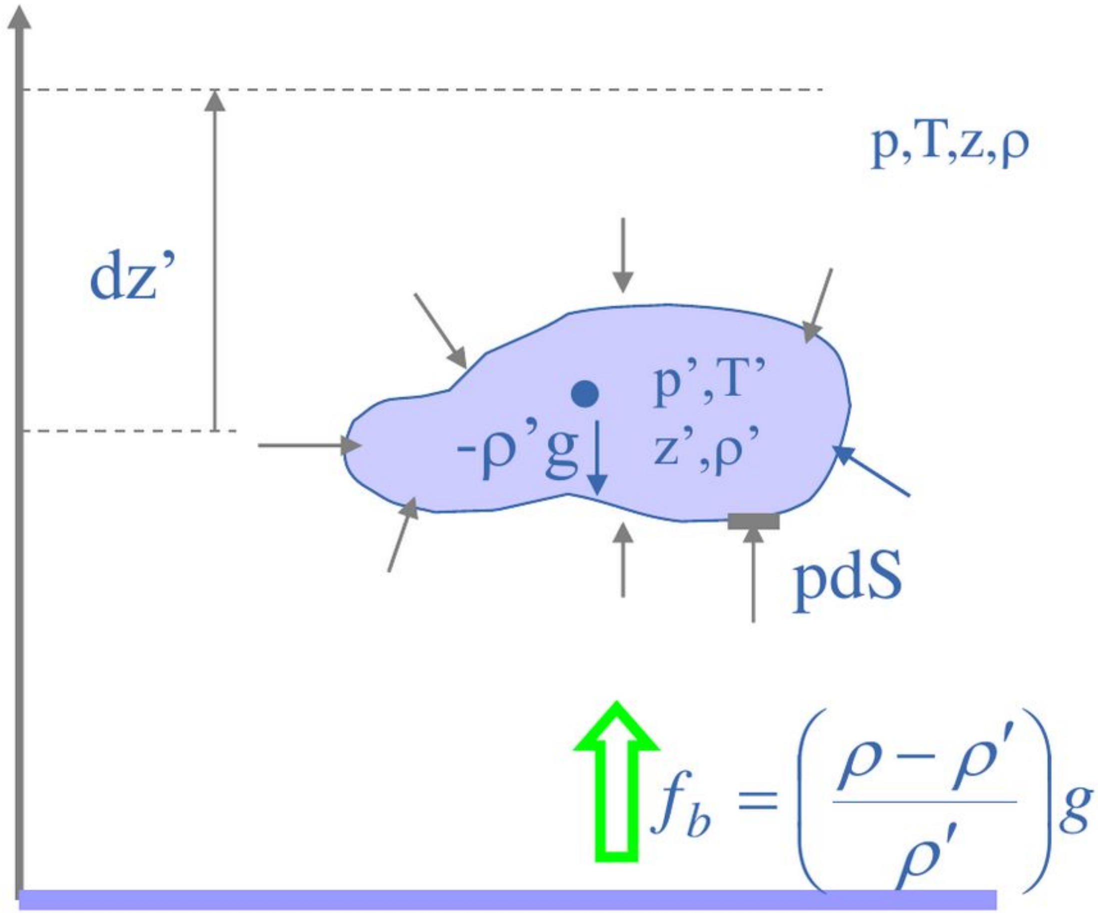
Wielkości nieprimowane będą opisywały stan otoczenia; wielkości primowane opisują stan cząstki

Płyn w otoczeniu znajduje się w stanie równowagi hydrostatycznej, zatem siła gradientu ciśnienia jest równoważona przez siłę grawitacji:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

- Rozważmy małe wychylenie cząstki w takim płynie. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że przyspieszenie cząstki musi być równe sunie siły grawitacji i siły gradientu ciśnienia

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z}$$



$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

$$0 = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$p = p'$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'} g$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho'}\right) g = f_b$$

f_b - siła wyporu (*buoyancy force*)

Załóżmy, że w chwili początkowej (położenie początkowe z=0) *cząstka* i otoczenie miały tę samą gęstość $\rho'_o = \rho_o$

Rozłóżmy ciśnienie *cząstki* i otoczenia w szereg Taylora, zaniedbując człony wyższego rzędu

$$\rho' = \rho'_o + \left(\frac{d\rho'}{dz}\right)z + \cdots$$

$$\rho = \rho_o + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)z + \cdots$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{g}{\rho'}\left[\left(\frac{d\rho}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho'}{dz}\right)\right]z \approx \frac{g}{\rho_o}\left[\left(\frac{d\rho}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho'}{dz}\right)\right]z$$

Częstotliwość Brunt-Väisälä, N, zdefiniowana jest następująco:

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o}\left[\left(\frac{d\rho'}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)\right]$$

Nazwana jest również ‘częstotliwością wyporu’ (*buoyancy frequency*)

Równanie ruchu pionowego przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0$$

$$z = A_1 \exp(iNt) + B_1 \exp(-iNt)$$

$$z = A_1 \cos(Nt) + B_1 \sin(Nt) \qquad , N^2 > 0$$

$$z = A_1 \exp(|N|t) + B_1 \exp(-|N|t) \ , N^2 < 0$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o}\left[\left(\frac{d\rho'}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)\right]$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + N^2 z = 0$$

$N^2 > 0$: równowaga stabilna, okres oscylacji: $\tau_g = \frac{2\pi}{N}$

$N^2 = 0$: równowaga obojętna

$N^2 < 0$: równowaga niestabilna

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o}\left[\left(\frac{d\rho'}{dz}\right) - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)\right]$$

Dla wilgotnej (ale nienasyconej) atmosfery.

Z równania gazu doskonałego, zaniedbując fluktuacje ciśnienia:

$$p' = RT_v^{'}\rho' \quad , \quad p = RT_v\rho$$

$$\frac{d\rho'}{dz} = -\frac{p'}{RT_v^{'2}}\frac{dT_v^{'}}{dz} = \frac{\rho'}{T_v^{'}}\Gamma_d \quad , \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{p}{RT_v^2}\frac{dT_v}{dz} = -\frac{\rho}{T_v}\frac{dT_v}{dz}$$

$$N^2 = \frac{g}{\rho_o}\left[\frac{\rho'}{T'}\Gamma_d + \frac{\rho}{T_v}\frac{dT_v}{dz}\right] = \frac{g}{T_o}\left[\frac{dT_v}{dz} + \Gamma_d\right]$$

$$T' = T_v = T_o\, , \rho' = \rho = \rho_o$$

E.g. for air ideal gas equation can be used as a goos approximation of equation of state:

$$p = \rho R T$$

$$\mathrm{d}Q = c_v\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}\alpha \qquad\qquad \mathrm{d}Q = c_p\,\mathrm{d}T - \alpha\,\mathrm{d}p$$

$$\alpha = RT/p \text{ and and } c_p - c_v = R$$

Adiabatic processes:

In adiabatic processes there are no sources and sinks of heat:

$$c_p\,\mathrm{d}T = \alpha\,\mathrm{d}p$$

The **potential temperature**, Θ is the temperature that a fluid would have if moved adiabatically to some reference pressure (often 1000 hPa, close to the pressure at the earth's surface). In adiabatic flow the potential temperature of a fluid parcel is conserved, by definition:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

For an ideal gas:

$$d\eta = c_p \, d\ln T - R \, d\ln p$$

$$c_p \, d\ln\theta = c_p \, d\ln T - R \, d\ln p$$

Consequently:

reference pressure $\kappa = R/c_p$

$$\theta = T\left(\frac{p_R}{p}\right)^{\kappa}$$

Z definicji wirtualnej temperatury potencjalnej:

$$\theta_v = T_v\left(\frac{p_o}{p}\right)^{\kappa}$$

$$\frac{1}{\theta_v}\frac{d\theta_v}{dz} = \frac{1}{T}\frac{dT_v}{dz} - \frac{R}{c_{pd}}\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = \frac{1}{T}\left(\frac{dT_v}{dz} + \frac{g}{c_{pd}}\right)$$

$$N^2 = \frac{g}{\theta_o}\frac{d\theta_v}{dz}$$

$$\frac{d\theta_v}{dz} > 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} < \Gamma_d$$

Równowaga stabilna

$$\frac{d\theta_v}{dz} = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} = \Gamma_d$$

Równowaga obojętna

$$\frac{d\theta_v}{dz} < 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{dT_v}{dz} > \Gamma_d$$

Równowaga niestabilna

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho'}\right) g$$

$$RT\rho = p \,, \quad RT'\rho' = p$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = g\left(\frac{T' - T}{T}\right)$$

$$\Gamma' = \Gamma_d \quad \text{lub} \quad \Gamma' = \Gamma_s$$

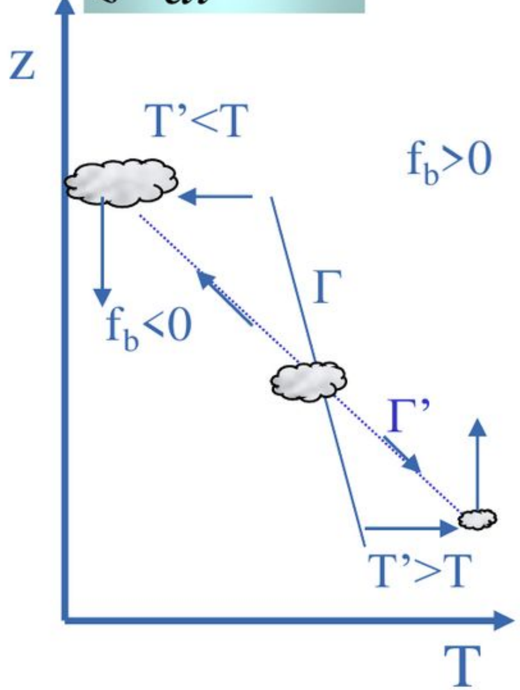
$$T' = T_0 - \Gamma' z'$$

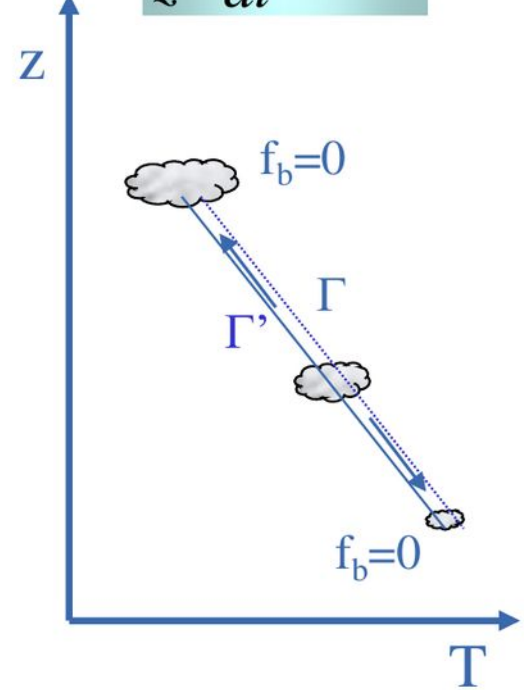
$$T = T_0 - \Gamma z'$$

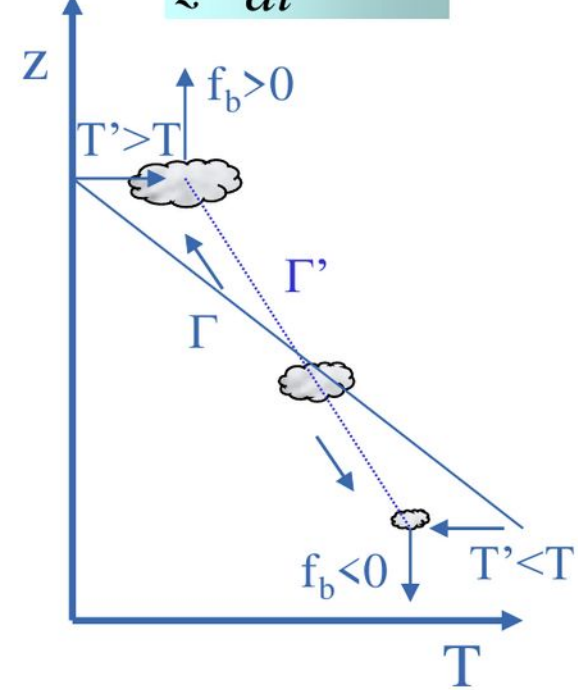
$$\boxed{\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{g}{T}\left(\Gamma - \Gamma'\right) z'}$$

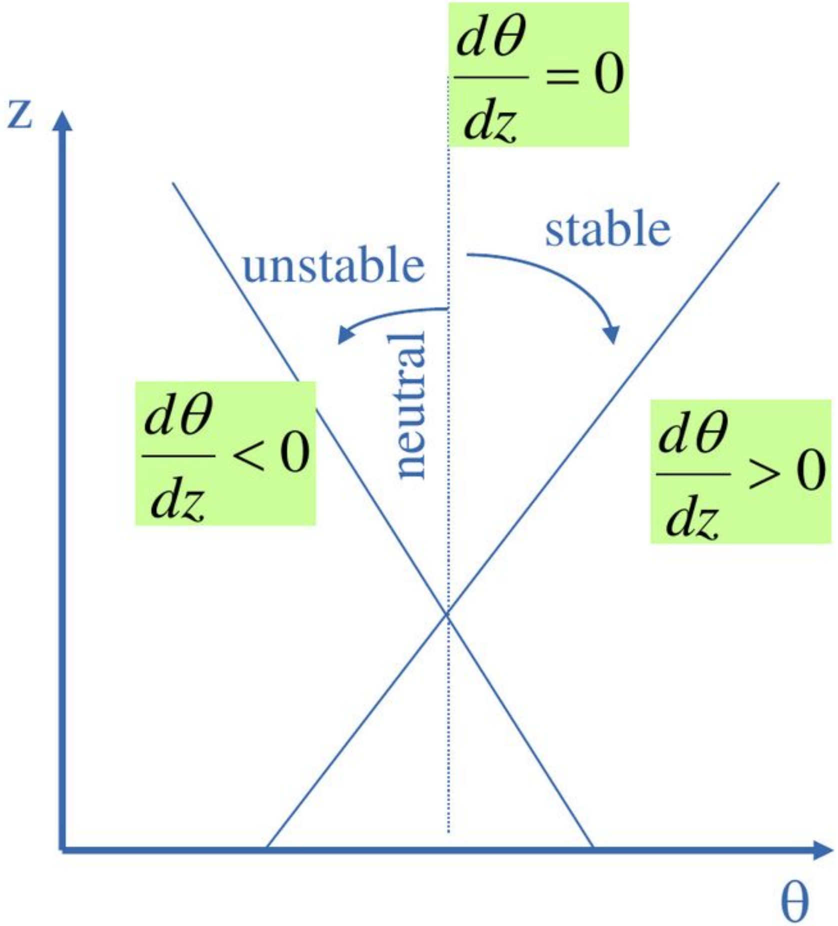
$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{g}{T}(\Gamma - \Gamma')z' , \quad \Gamma' = \Gamma_d \text{ lub } \Gamma' = \Gamma_s$$

Równowaga stabilna	Równowaga neutralna	Równowaga niestabilna
$\Gamma < \Gamma'$	$\Gamma = \Gamma'$	$\Gamma > \Gamma'$
$\frac{1}{z'}\frac{d^2 z'}{dt^2} < 0$	$\frac{1}{z'}\frac{d^2 z'}{dt^2} = 0$	$\frac{1}{z'}\frac{d^2 z'}{dt^2} > 0$







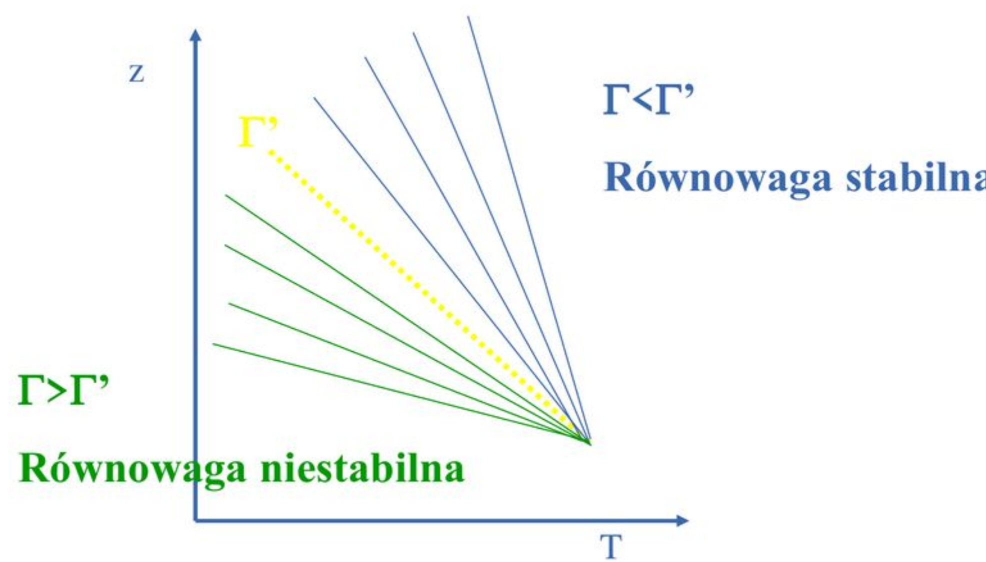


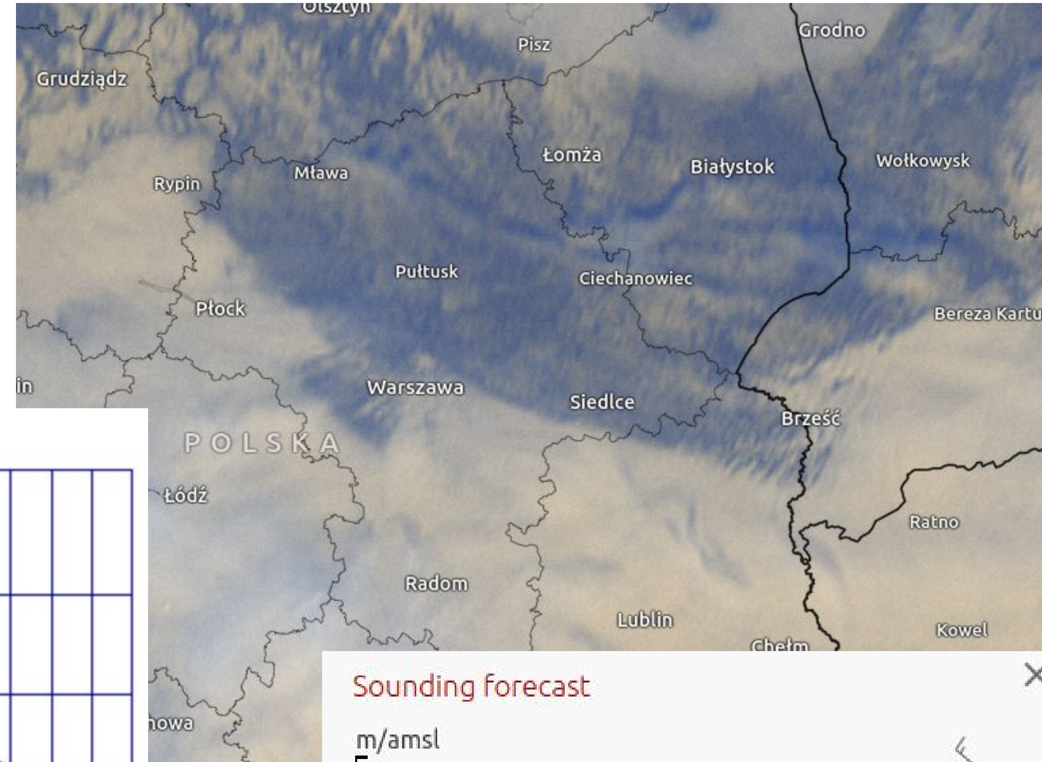
$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta}{T}\left(\Gamma_d - \Gamma\right)$$

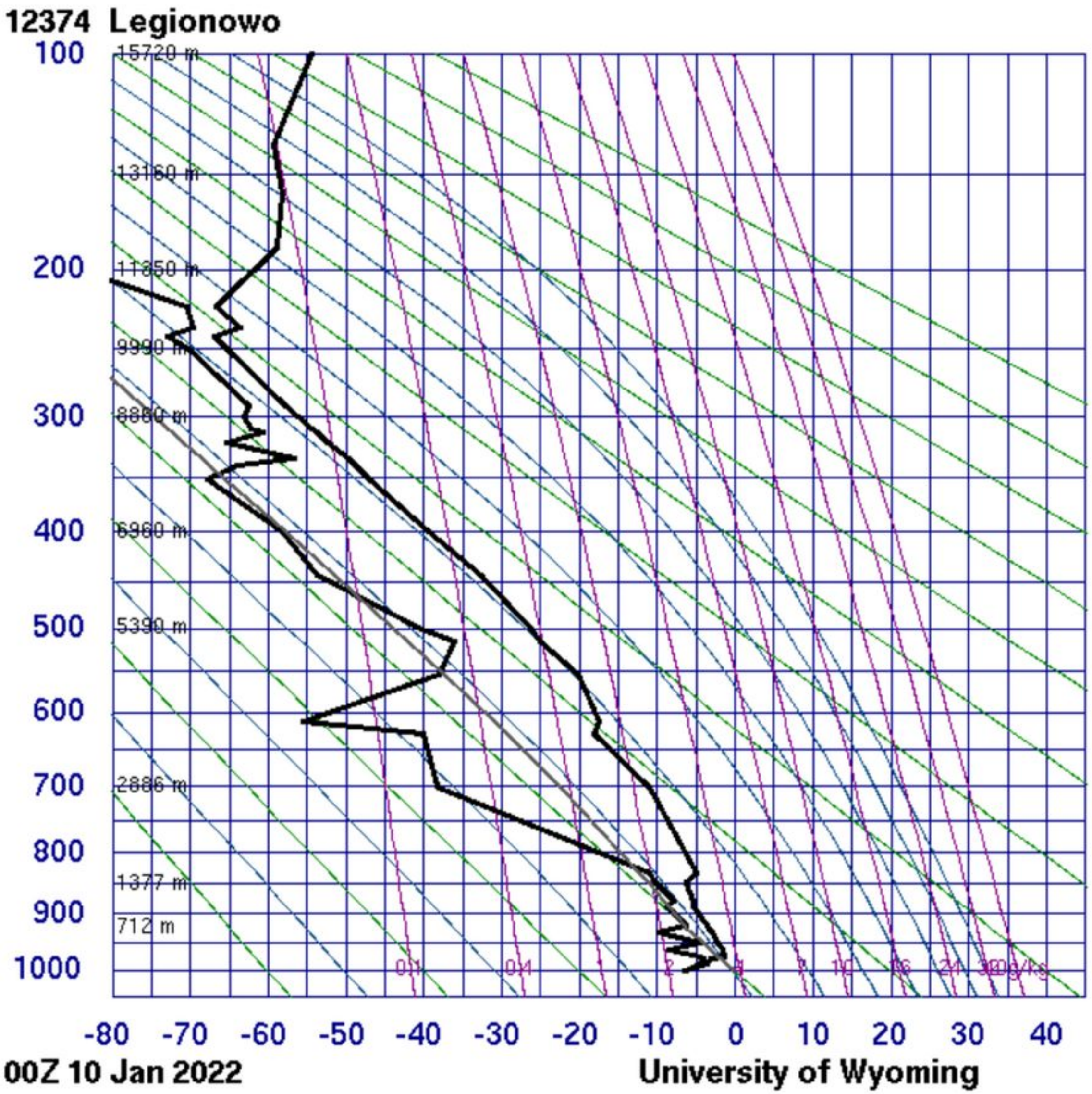
$$\frac{d\theta}{dz} > 0 \qquad (stable)$$

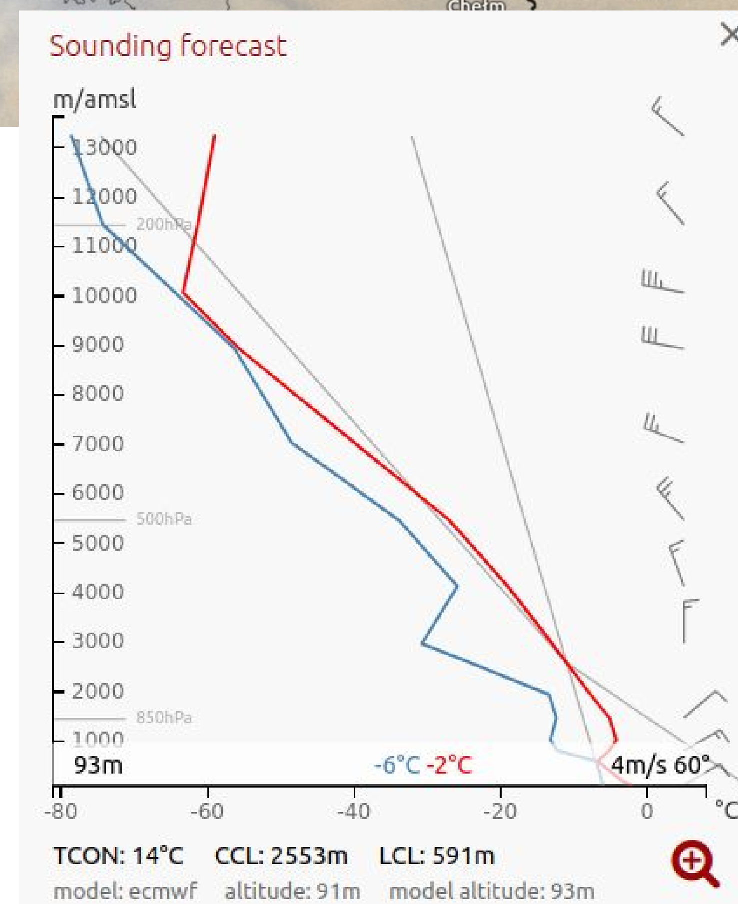
$$\frac{d\theta}{dz} = 0 \qquad (neutral)$$

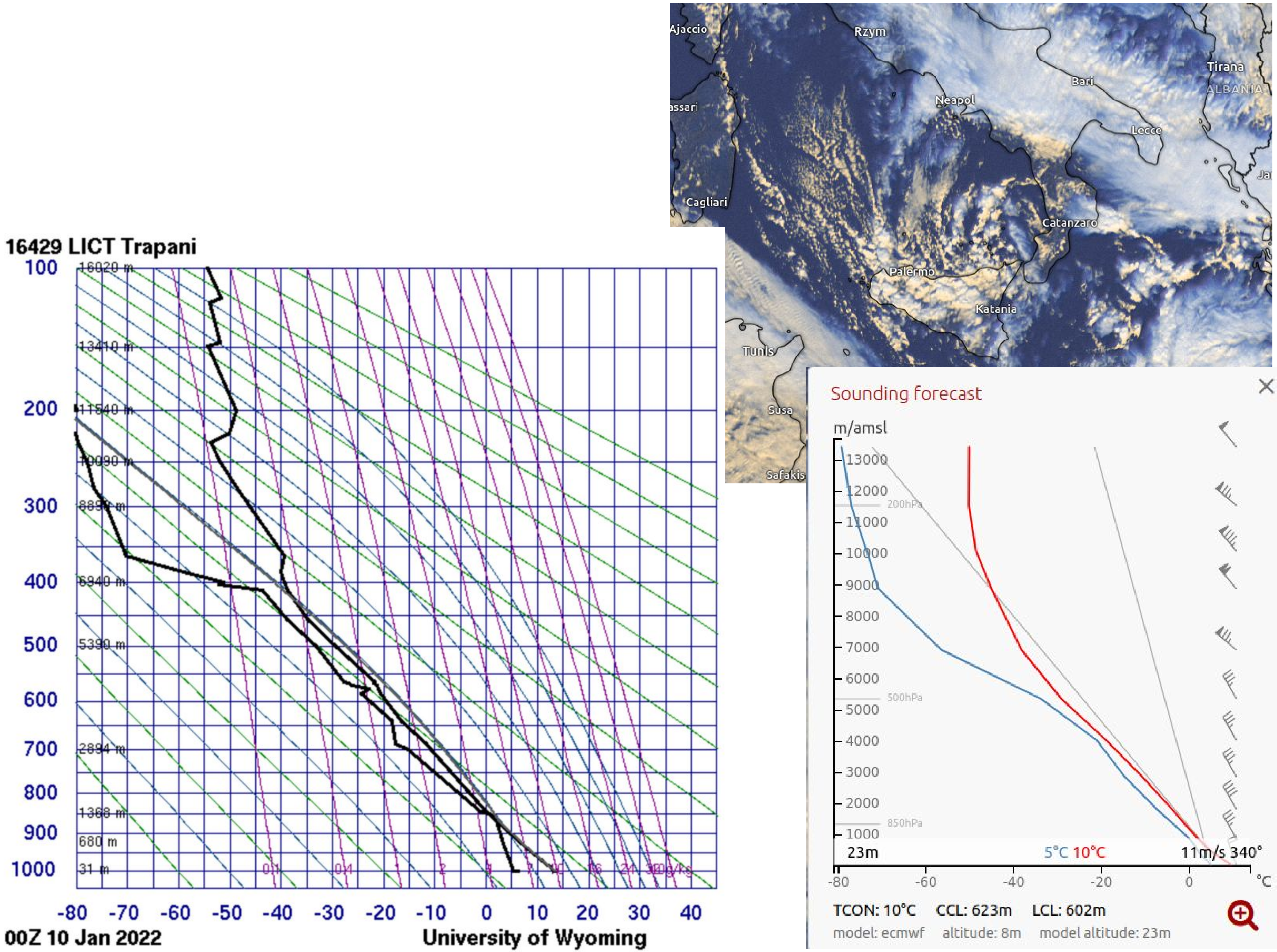
$$\frac{d\theta}{dz} < 0 \qquad (unstable)$$




Olsztyn
Pisz
Grodno
Grudziądz
Łomża
Białystok
Wołkowysk
Rypin
Mława
Pułtusk
Ciechanowiec
Płock
Bereza Kartuska
Warszawa
Siedlce
Brześć
POLSKA
Łódź
Ratno
Radom
Lublin
Kowel
Chełm


12374 Legionowo
100
15720 m
13160 m
200
11850 m
9990 m
300
8860 m
400
6960 m
500
5390 m
600
700
2886 m
800
1377 m
900
712 m
1000
0.1
0.4
1
2
4
7
10
16
24
32
g/kg
-80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40
00Z 10 Jan 2022
University of Wyoming


Sounding forecast
m/amsl
13000
12000
200hPa
11000
10000
9000
8000
7000
6000
500hPa
5000
4000
3000
2000
850hPa
1000
93m
-6°C -2°C
4m/s 60°
-80 -60 -40 -20 0 °C
TCON: 14°C CCL: 2553m LCL: 591m
model: ecmwf altitude: 91m model altitude: 93m


16429 LICT Trapani
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
16020 m
13410 m
11540 m
10090 m
8890 m
6940 m
5390 m
2894 m
1368 m
680 m
31 m
-80 -70 -60 -50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40
00Z 10 Jan 2022
University of Wyoming
Ajaccio
Rzym
Tirana
ALBANIA
Bari
Neapol
Lecce
Cagliari
Catanzaro
Palermo
Katania
Tunis
Susa
Safakis
Sounding forecast
m/amsl
13000
12000
11000
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
200hPa
500hPa
850hPa
23m
5°C 10°C
11m/s 340°
-80 -60 -40 -20 0 °C
TCON: 10°C CCL: 623m LCL: 602m
model: ecmwf altitude: 8m model altitude: 23m