1100-4BW12, rok akademicki 2018/19

WSTĘP DO OPTYKI FOURIEROWSKIEJ

dr hab. Rafał Kasztelanic

Wykład 4

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

Załóżmy, że znamy rozkład pola na fale monochromatyczne w płaszczyźnie z_0.
Chcemy znaleźć rozkład pola w płaszczyźnie z_1.

Zakładam, że ten rozkład wygląda następująco:

$$u(x,y,z_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\nu_x,\nu_x,z_1) exp\left[i2\pi(x\nu_x + y\nu_y)\right] d\nu_x d\nu_y$$

Aby znaleźć rozwiązanie podstawiam to do równania falowego:

$$\Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Ponieważ mamy fale monochromatyczne postaci: $u(x)\ exp[i2\pi x\nu_x]$
to:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (2\pi\nu_x)^2 = (\frac{2\pi}{\lambda})^2 = k^2$$

$$\Delta \boldsymbol{u} - k^2\boldsymbol{u} = 0$$ równanie Helmholtza

Po podstawieniu mamy:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(\nu_x,\nu_x,z_1) + k^2[1-(\lambda\nu_x)^2 - \left(\lambda\nu_y\right)^2]U(\nu_x,\nu_x,z_1)=0$$

Przestrzeń swobodna jako filtr częstości przestrzennych

Rozwiązaniem jest równanie:

$$U(\nu_x, \nu_x, z_1) = U_0(\nu_x, \nu_x) exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}\underline{\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2}}z_1\right]$$

dla: $\nu_x^2 + \nu_x^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 1-(\lambda\nu_x)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2 \geq 0$ - fala płaska rozprzestrzeniająca się

dla: $\nu_x^2 + \nu_x^2 > \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad 1-(\lambda\nu_x)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2 < 0$ - fala zanikająca, evanescentna (niejednorodna)

Funkcja przenoszenia:

$$H(\nu_x, \nu_x) = \frac{U(\nu_x, \nu_x, z_1)}{U_0(\nu_x, \nu_x)} = \begin{cases} exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda\nu_x)^2-\left(\lambda\nu_y\right)^2}z_1\right] & \text{dla: } \nu_x^2 + \nu_x^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{dla: } \nu_x^2 + \nu_x^2 > \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

Propagację fali monochromatycznej w przestrzeni możemy interpretować jako proces filtracji dolnoprzepustowej. Pasmo przenoszenia równoważnego filtra jest ograniczone w płaszczyźnie częstości przestrzennym do koła o promieniu 1/λ. Fale, których częstości są wewnątrz tego koła przenoszone są bez zniekształceń lecz z przesunięciem fazowym.
Częstość z poza koła są tłumione i w odległości kilku λ nie są rejestrowane.

Prędkość fazowa, prędkość grupowa

Załóżmy, że mamy 2 fale monochromatyczne:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

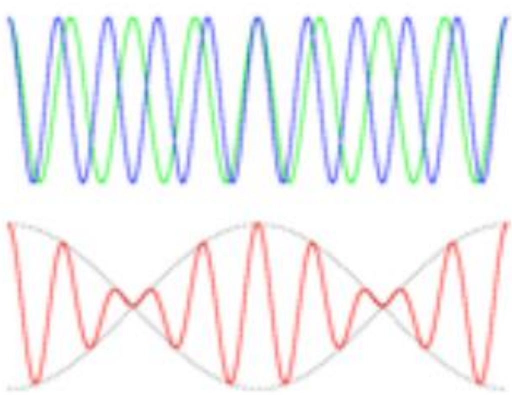
Prędkość fazowa – prędkość poruszania się punktów o tej samej fazie:

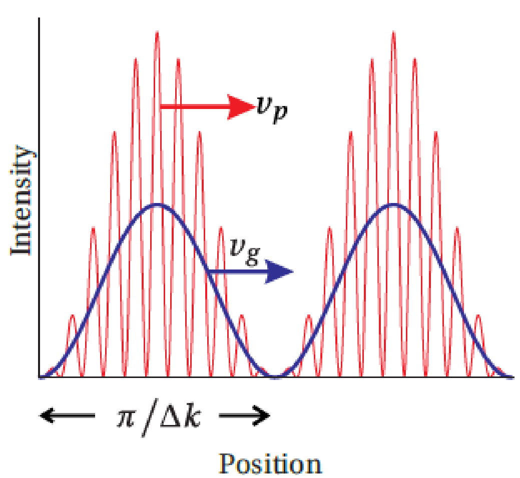
$$v_{p1} = \omega_1 / k_1 \qquad v_{p2} = \omega_2 / k_2$$

Prędkość grupowa – dla fal niemonochromatycznych, prędkość rozchodzenia się informacji,
Rozchodzenia się obwiedni:

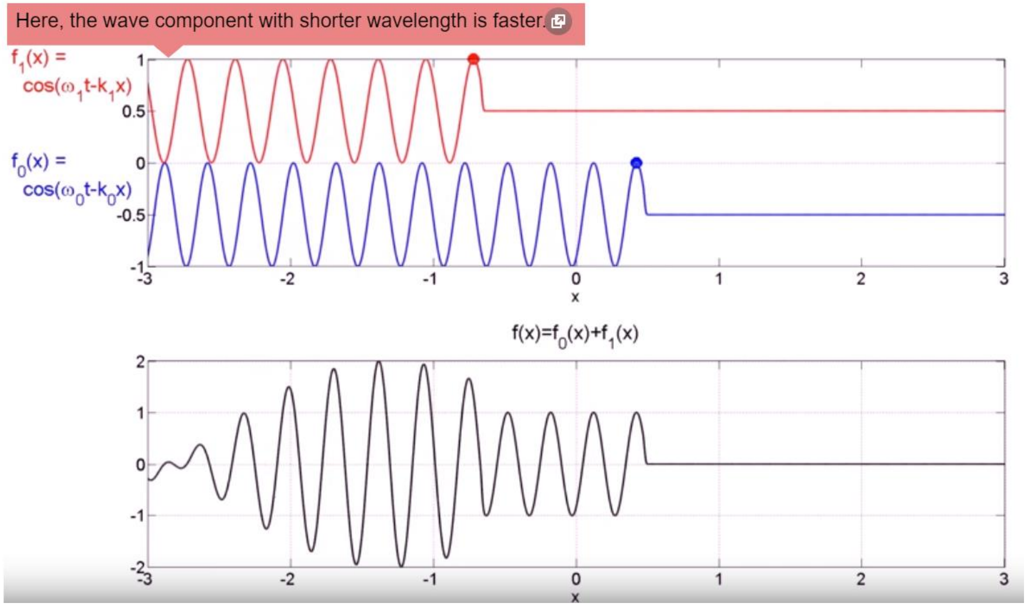
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}$$

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$





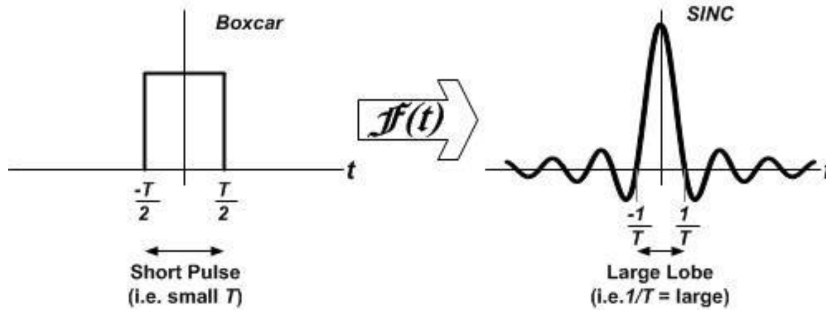
Prędkość fazowa, prędkość grupowa



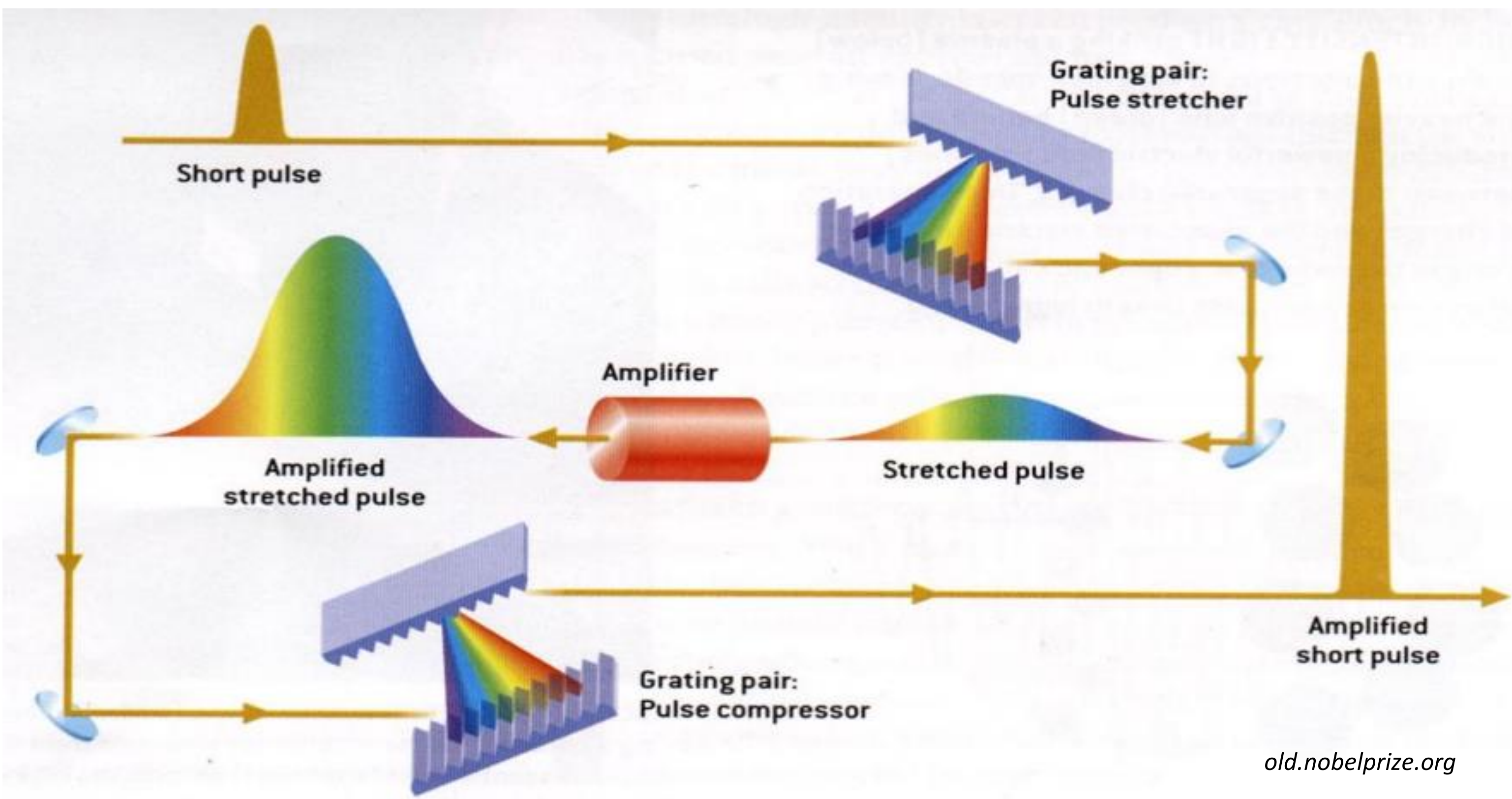
www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_3359660903&feature=iv&src_vid=ePJdV75fT5o&v=tlM9vq-bepA

Widmo krótkiego impulsu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

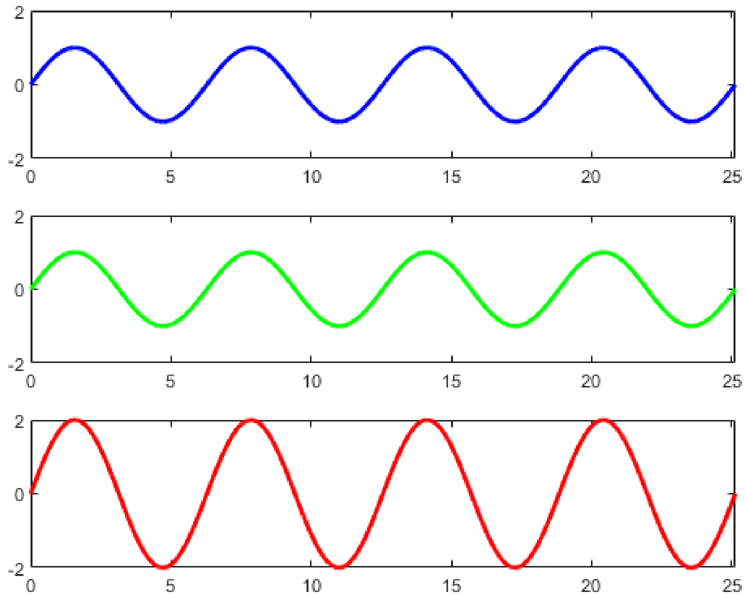


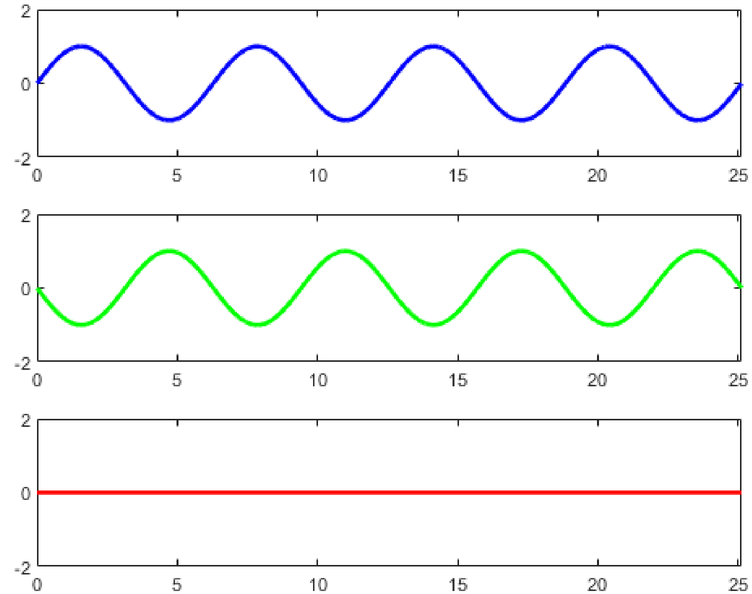
e2e.ti.com/blogs_/b/analogwire

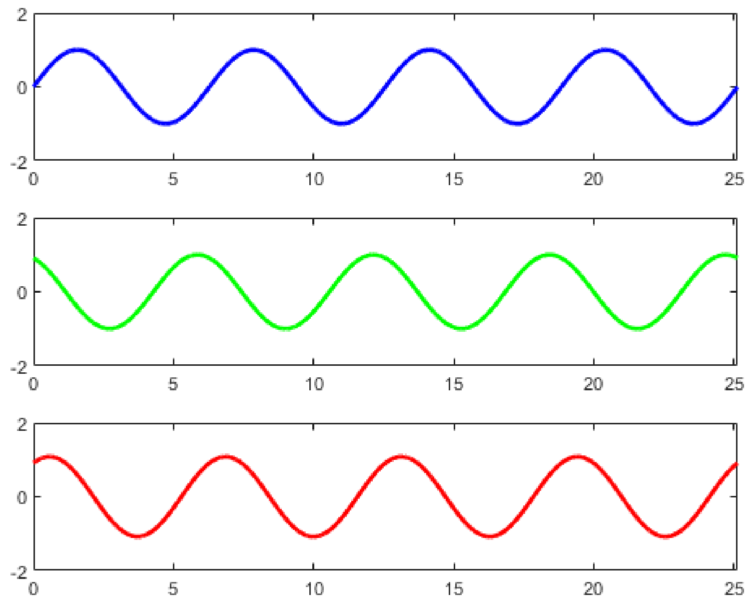


old.nobelprize.org

Interferencja

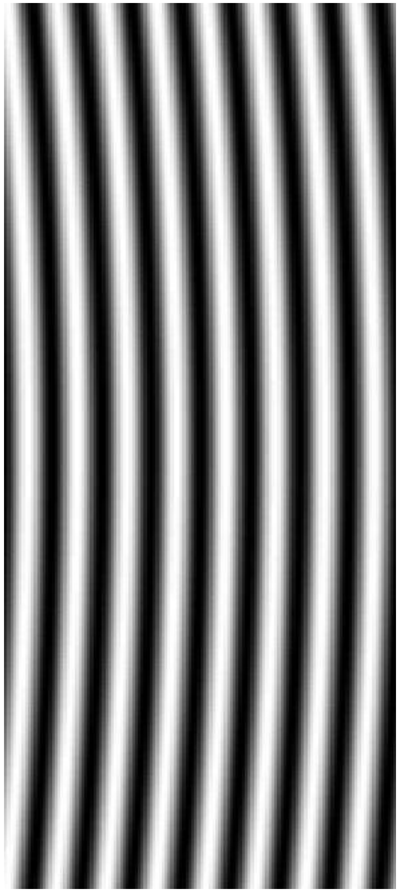


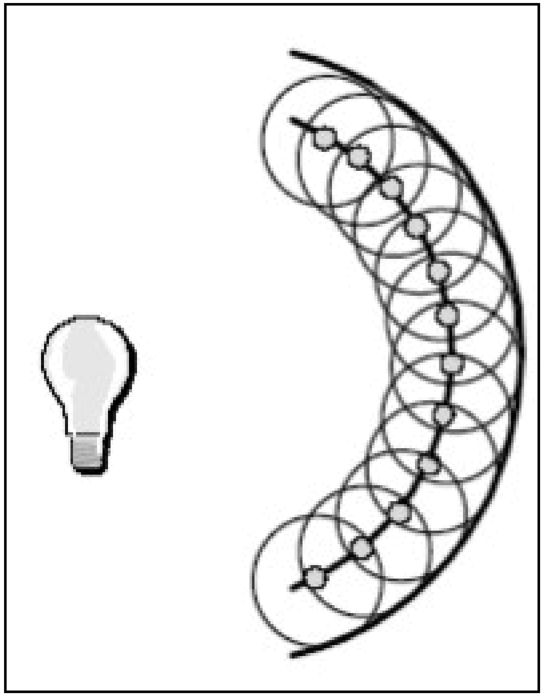




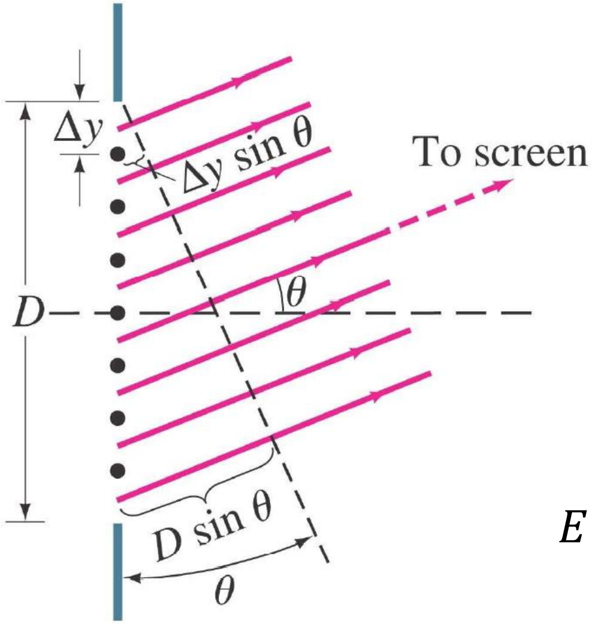
Interferencja – pojedyncza szczelina

Propagację fali elektromagnetycznej za przeszkodą możemy sobie wyobrażać za Huygensem jako falę pochodzącą ze zbioru punktowych źródeł światła umieszczonych w płaszczyźnie przesłony.





Interferencja – pojedyncza szczelina



- Wszystkie oscylatory w fazie (fala płaska)
- Równe amplitudy w punkcie obserwacji (daleko ekran)

Interferencja *N* fal

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_2 - \omega t)} + \cdots + \frac{E_0(r)}{N} e^{i(kr_N - \omega t)}$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \cdots + e^{ik(r_N - r_1)}\right]$$

$$\beta = k\ D\ sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} D\ sin\theta$$

$$\Delta\beta = k\ \Delta y\ sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y\ sin\theta$$

$$\Delta\beta = k(r_2 - r_1),\ 2\Delta\beta = k(r_3 - r_1),\ \cdots,\ N\Delta\beta = k(r_N - r_1)$$

$$E = \frac{E_0(r)}{N} e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \underbrace{\left[1 + \left(e^{i\Delta\beta}\right) + \left(e^{i\Delta\beta}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\Delta\beta}\right)^N\right]}_{\frac{e^{i\Delta\beta N} - 1}{e^{i\Delta\beta} - 1}}$$

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N}-1}{e^{i\Delta\beta}-1}=\frac{e^{iN\Delta\beta/2}\left[e^{iN\Delta\beta/2}-e^{-iN\Delta\beta/2}\right]}{e^{i\Delta\beta/2}\left[e^{i\Delta\beta/2}-e^{-i\Delta\beta/2}\right]}=e^{i(N-1)\Delta\beta/2}\frac{sin(N\Delta\beta/2)}{sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E=\frac{E_0(r)}{N}e^{-i\omega t}e^{ikr_1}e^{i(N-1)\Delta\beta/2}\frac{sin(N\Delta\beta/2)}{sin(\Delta\beta/2)}$$

$$\boxed{I=|E|^2=\frac{I_0}{N^2}\frac{sin^2(N\Delta\beta/2)}{sin^2(\Delta\beta/2)}}$$

Interferencja

Interferencja – pojedyncza szczelina

$$\frac{e^{i\Delta\beta N}-1}{e^{i\Delta\beta}-1}=\frac{e^{iN\Delta\beta/2}\left[e^{iN\Delta\beta/2}-e^{-iN\Delta\beta/2}\right]}{e^{i\Delta\beta/2}\left[e^{i\Delta\beta/2}-e^{-i\Delta\beta/2}\right]}=e^{i(N-1)\Delta\beta/2}\frac{sin(N\Delta\beta/2)}{sin(\Delta\beta/2)}$$

$$E=\frac{E_0(r)}{N}e^{-i\omega t}e^{ikr_1}e^{i(N-1)\Delta\beta/2}\frac{sin(N\Delta\beta/2)}{sin(\Delta\beta/2)}$$

$$\boxed{I=|E|^2=\frac{I_0}{N^2}\frac{sin^2(N\Delta\beta/2)}{sin^2(\Delta\beta/2)}}$$

Interferencja

$$N\to\infty,\qquad \Delta y\to 0$$

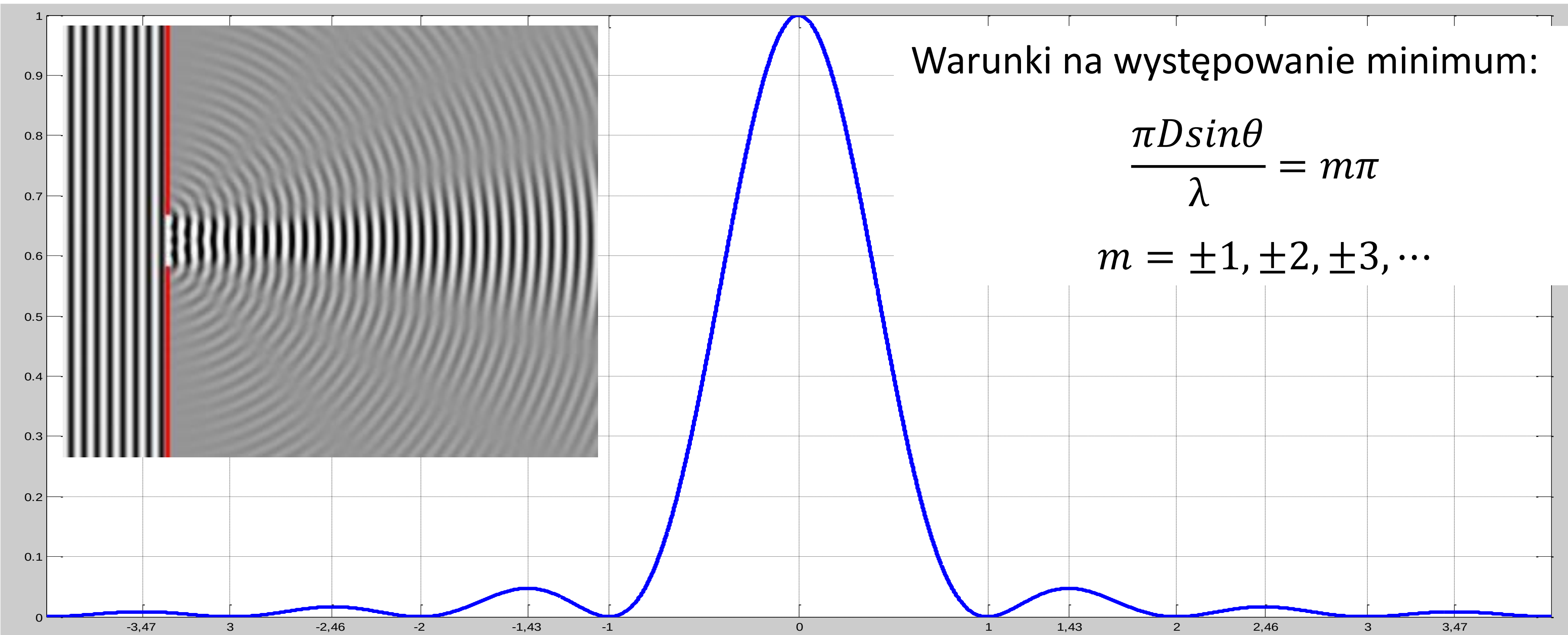
$$\Delta\beta\sim\Delta y\ \Rightarrow\ sin^2(\Delta\beta/2)\approx\Delta\beta/2$$

$$\boxed{I=I_0\frac{sin^2(N\Delta\beta/2)}{(N\Delta\beta/2)^2}=I_0\left(\frac{sin(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2}$$

Dyfrakcja

Interferencja – pojedyncza szczelina

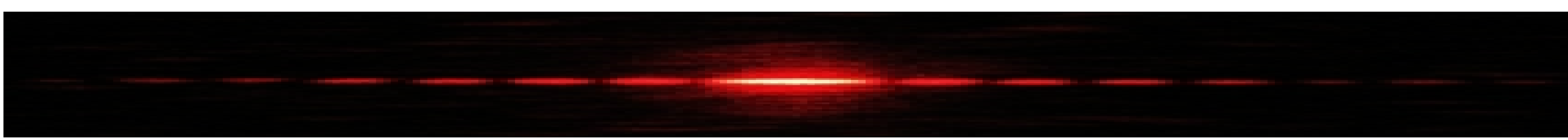
$$I = I_0\left(\frac{sin(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2$$



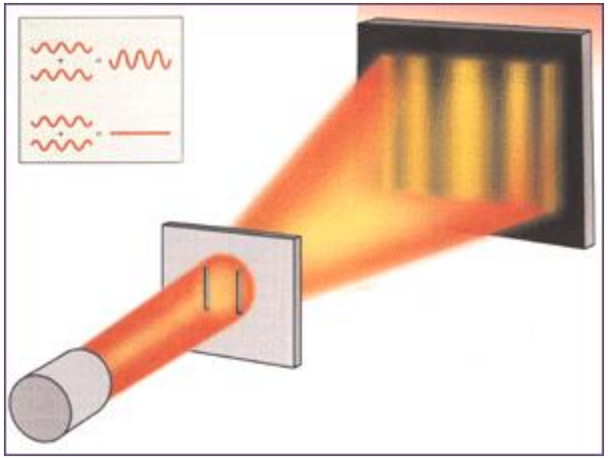
Warunki na występowanie minimum:

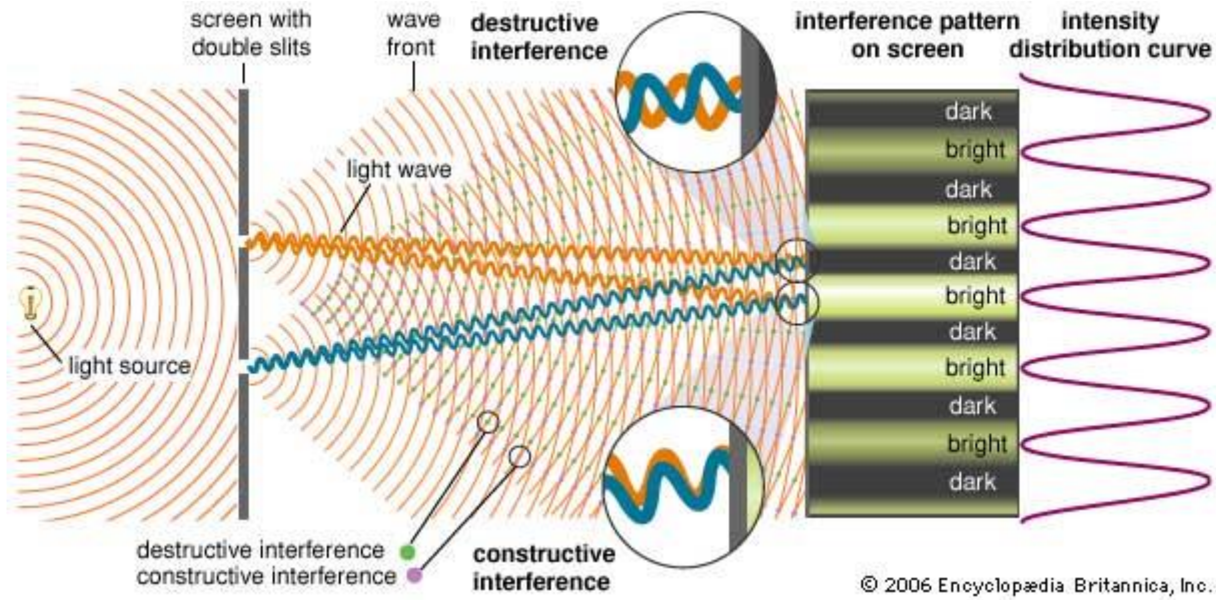
$$\frac{\pi D sin\theta}{\lambda} = m\pi$$

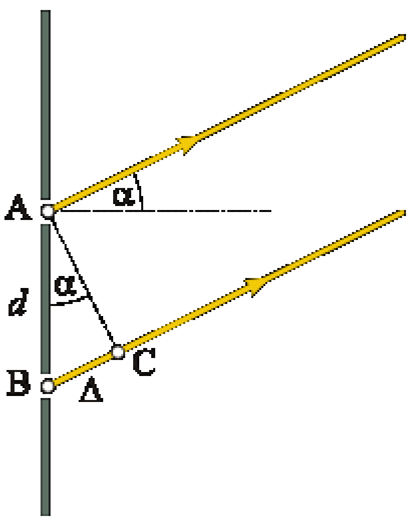
$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)







$$\frac{\Delta}{d} = \sin\alpha \qquad \Delta = d\sin\alpha$$

maksimum: $d\ sin\alpha_k = k\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{d}{\lambda}, \frac{d}{\lambda}\right)$

minimum: $d\ sin\alpha_k = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\lambda \quad k \in \mathbb{Z}, k \in \left(-\frac{2d-\lambda}{2\lambda}, \frac{2d-\lambda}{2\lambda}\right)$

Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

$$E_1 = Ae^{i(kr_1 - \omega t)}$$
$$E_2 = Ae^{i(kr_2 - \omega t)}$$

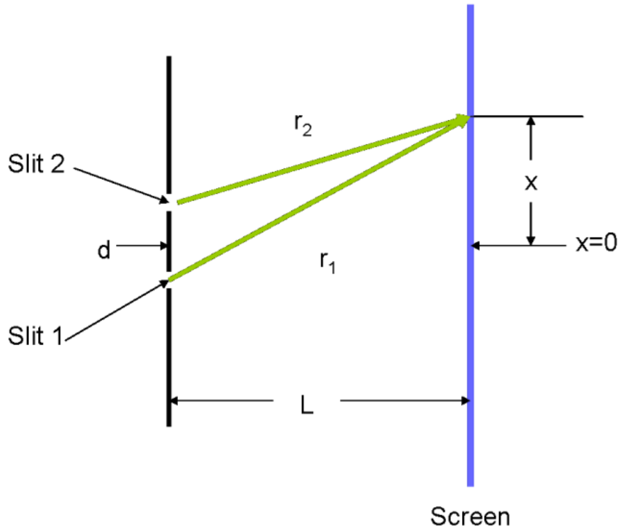
$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Interferencja}}$ $\longrightarrow$ $E = E_1 + E_2$

$$E = E_1 + E_2 = Ae^{i(kr_1-\omega t)} + Ae^{i(kr_2-\omega t)} = Ae^{i(kr_1-\omega t)}\left(1 + e^{ik\Delta r}\right) =$$

$$= Ae^{i(kr_1-\omega t)}e^{ik\Delta r/2}\left(e^{ik\Delta r/2} + e^{-ik\Delta r/2}\right) = Ae^{i(kr_1-\omega t)}e^{ik\Delta r/2}2cos(k\Delta r/2)$$

gdzie: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = dsin\theta$$



Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

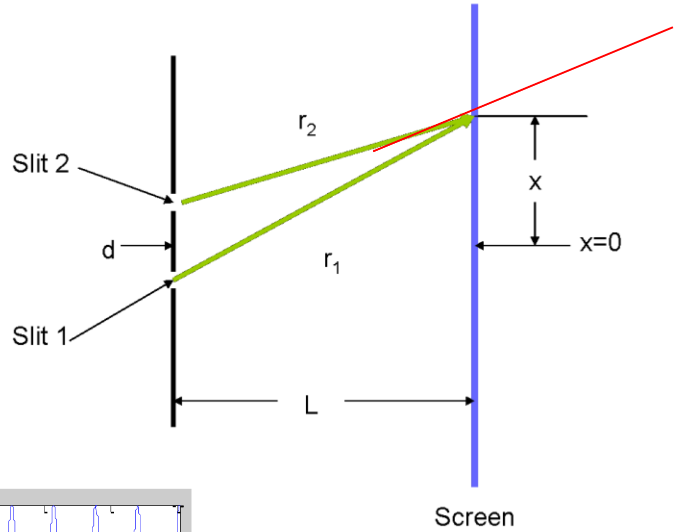
Odległość od punktu środkowego między szczelinami do danego punktu na ekranie:

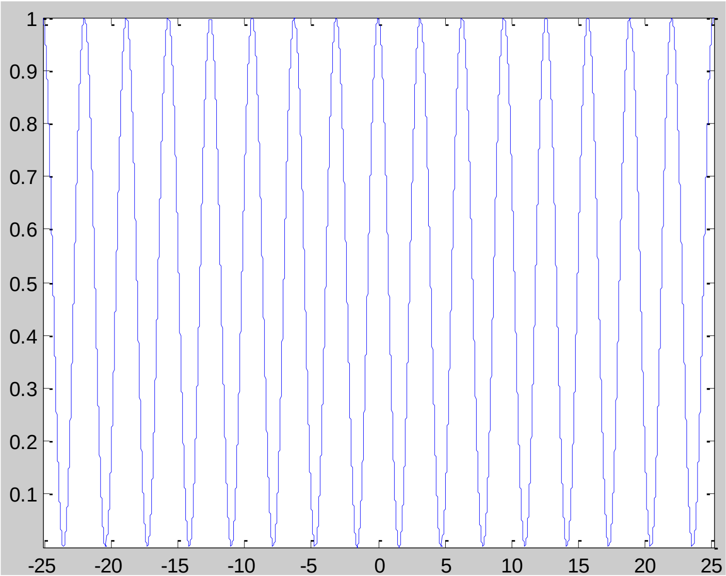
$$r = r_1 + \Delta r/2$$

$$E(r,\theta) = Ae^{i(kr-\omega t)} 2cos(\pi d sin\theta/\lambda)$$

$$\boxed{I(\theta) = 4I_0 cos^2(\pi d sin\theta/\lambda)}$$

natężenie jednej z fal





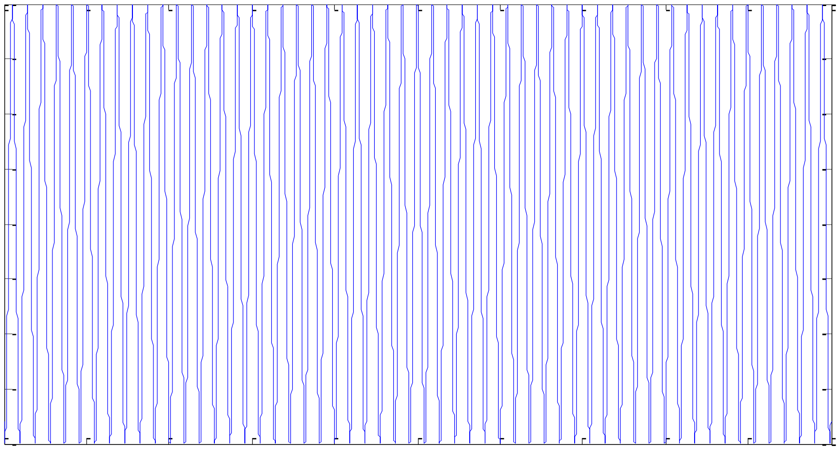
Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)

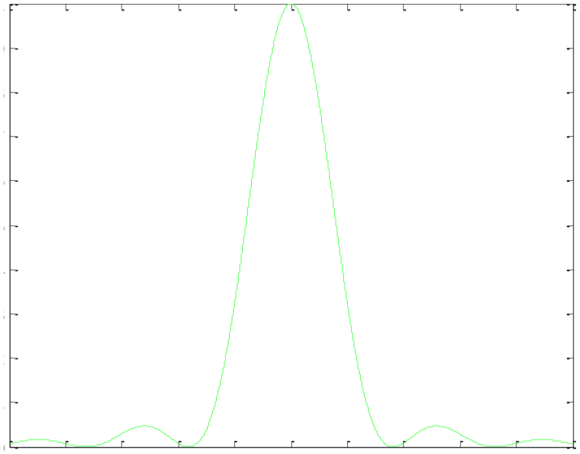
Trzeba jeszcze uwzględnić dyfrakcje na pojedynczej szczelinie:

$$I = Interferencja \cdot dyfrakcja$$

$$I(\theta) = 4I_0 cos^2(\pi d sin\theta/\lambda)$$

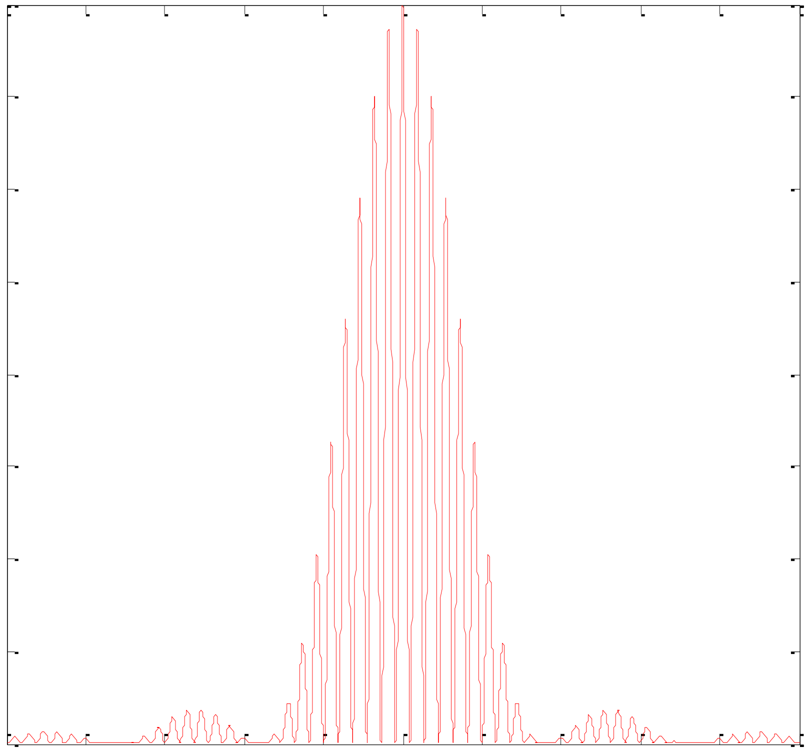
$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{sin(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2$$

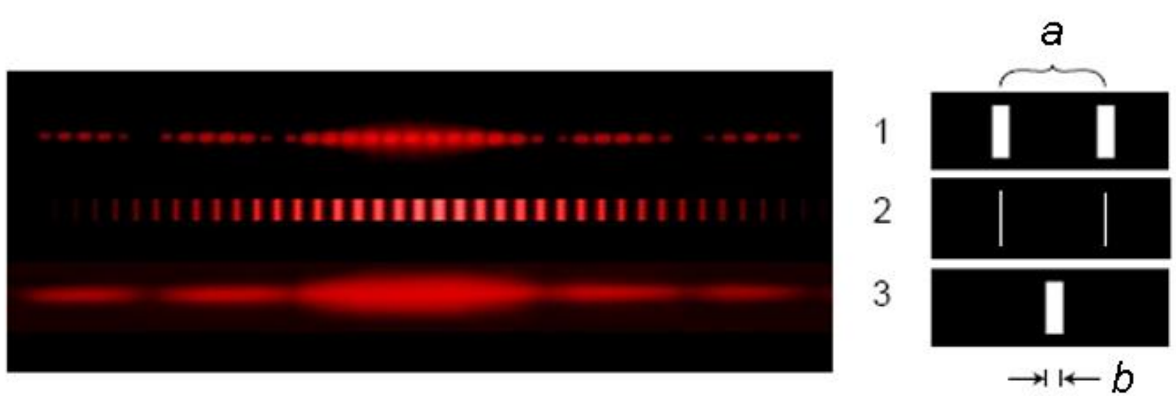




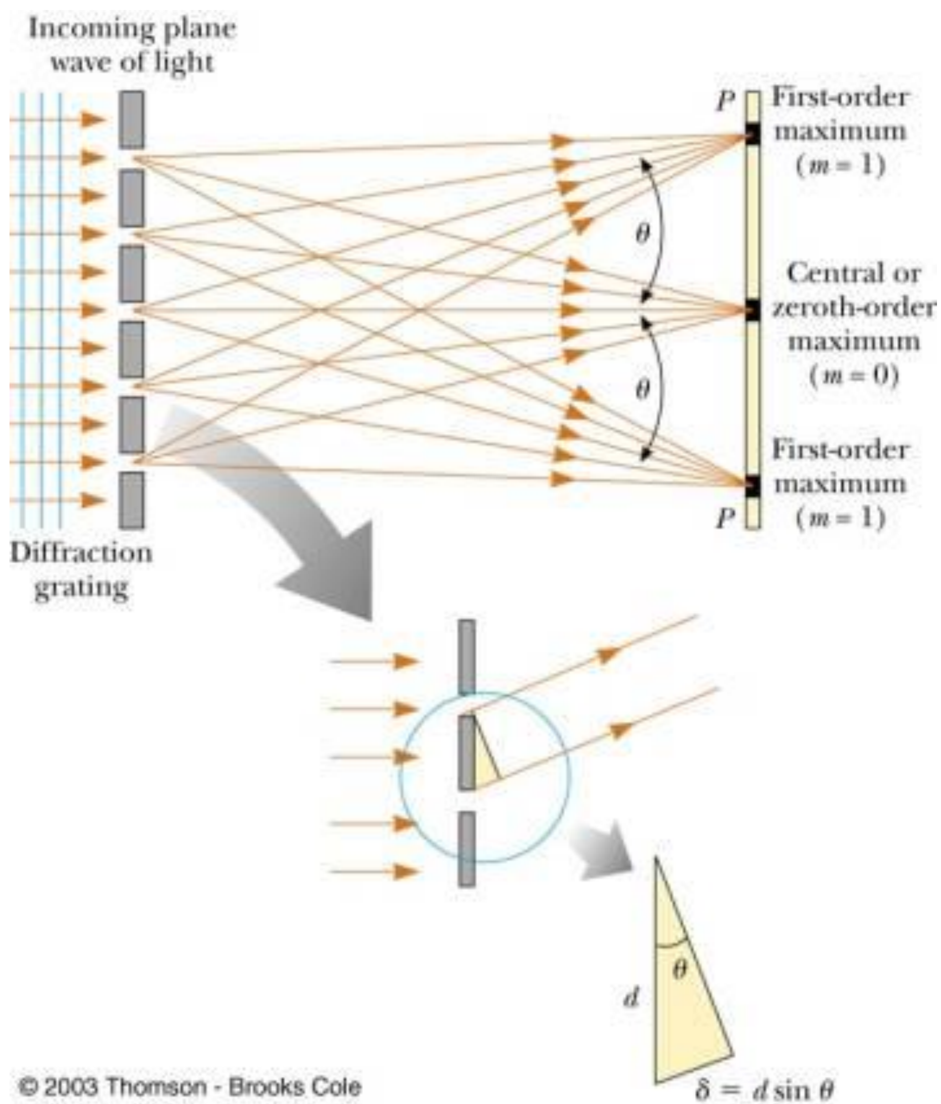
$$\boxed{I(\theta) = 4I_0 cos^2(\pi d sin\theta/\lambda)\left(\frac{sin(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2}$$

Interferencja – 2 szczeliny (doświadczenie Younga)





Interferencja – siatka dyfrakcyjna



Wzór siatki dyfrakcyjnej:

$$d\sin\left(\theta_k\right) = k\lambda$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

d – stała siatki
k – rząd ugięcia, numer wzmocnienia

Ponieważ zachodzi:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_k < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -1 < \theta_k < 1$$

czyli:

$$\frac{k\lambda}{d} < 1 \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = \left[\frac{d}{\theta}\right]$$

Interferencja – siatka dyfrakcyjna

Jak policzyć natężenie na ekranie.
Podobnie jak dla 2 szczelin:

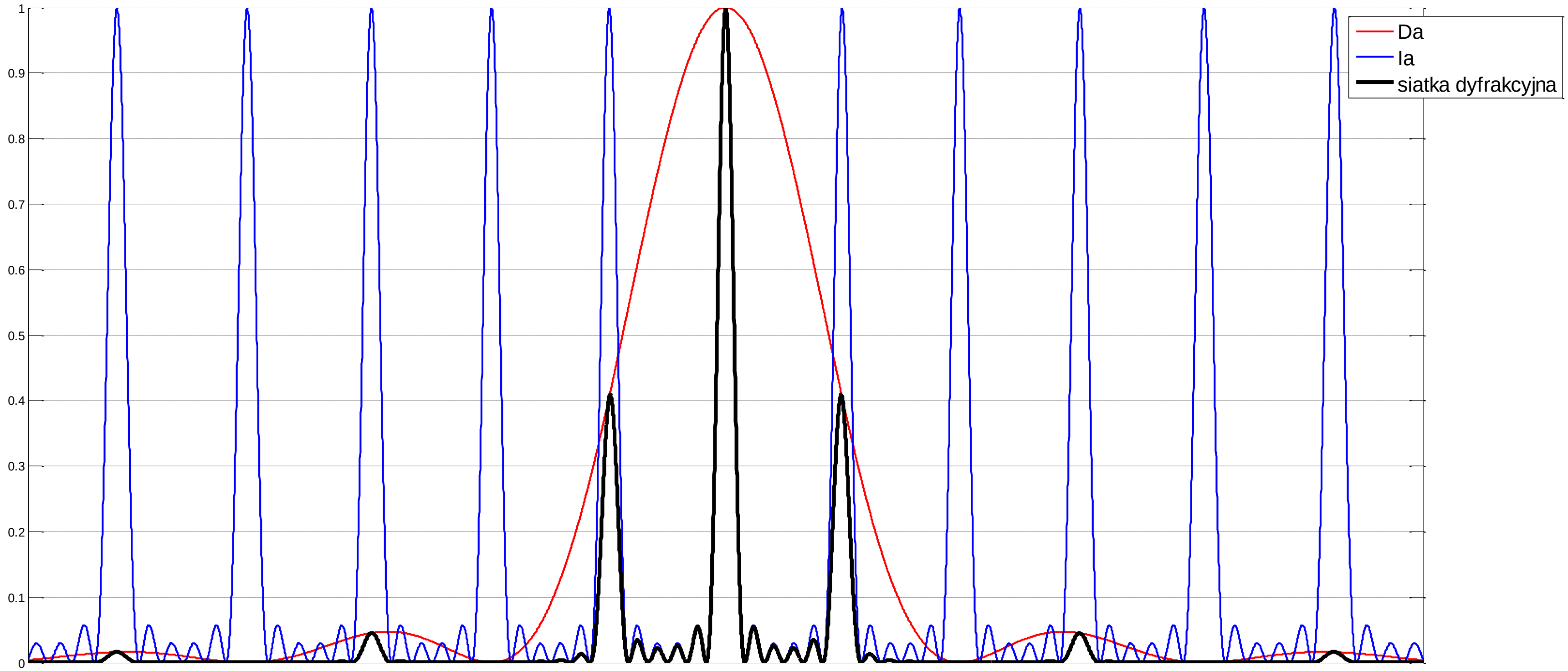
$$I = \underbrace{INTERFERENCJA}_{na\ N\ szczelinach\ (punktowych)} \cdot \underbrace{DYFRAKCJA}_{na\ pojedynczej\ szczelinie}$$

$$\frac{I_0}{N^2}\frac{sin^2(N\Delta\beta/2)}{sin^2(\Delta\beta/2)} \qquad\qquad I_0\left(\frac{sin(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2$$

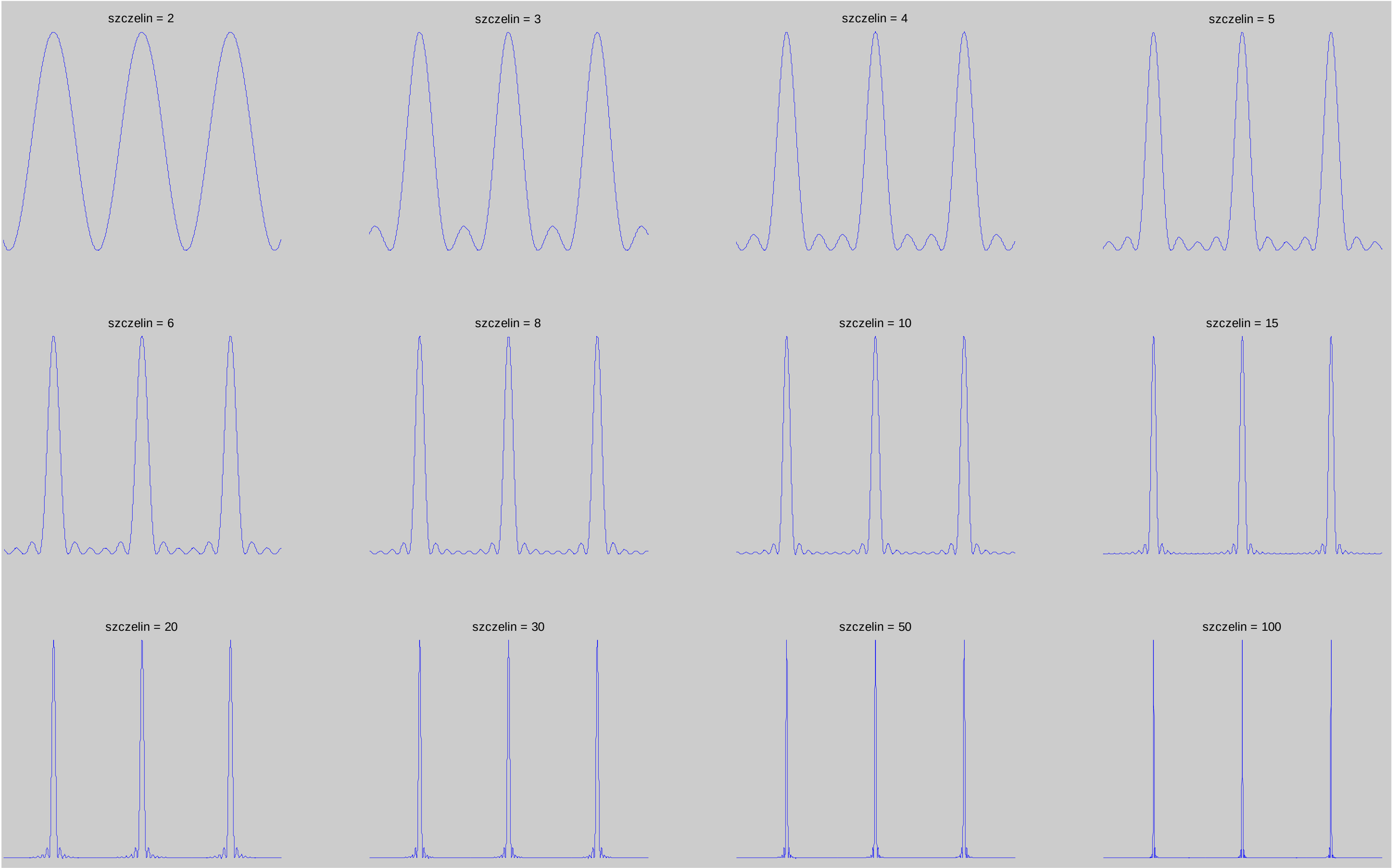
Było liczone dla pojedynczej szczeliny

$$\boxed{I(\theta) = \left[\frac{sin(\pi NDsin\theta/\lambda)}{Nsin(\pi Dsin\theta/\lambda)}\right]^2 \left[\frac{sin(\pi dsin\theta/\lambda)}{\pi dsin\theta/\lambda}\right]^2}$$

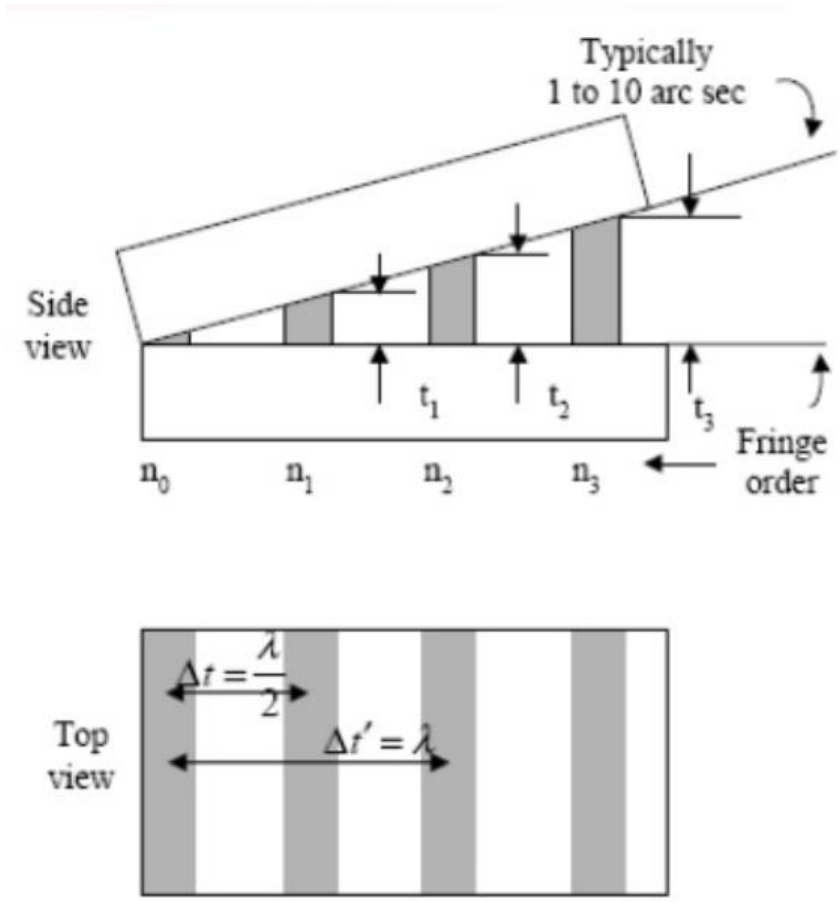
Interferencja – siatka dyfrakcyjna

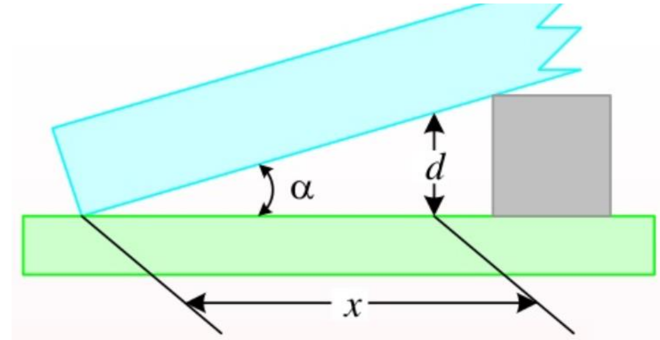


Interferencja – siatka dyfrakcyjna



Klin



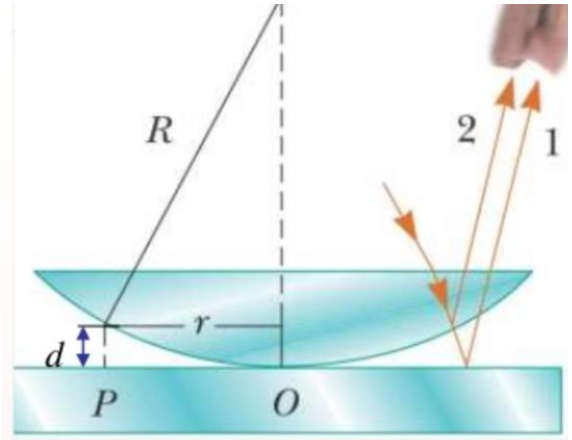


$$d = x\alpha$$

$$2n_f d_m = (m + ½)\lambda$$
$$2n_f(\alpha x_m) = (m + ½)\lambda$$

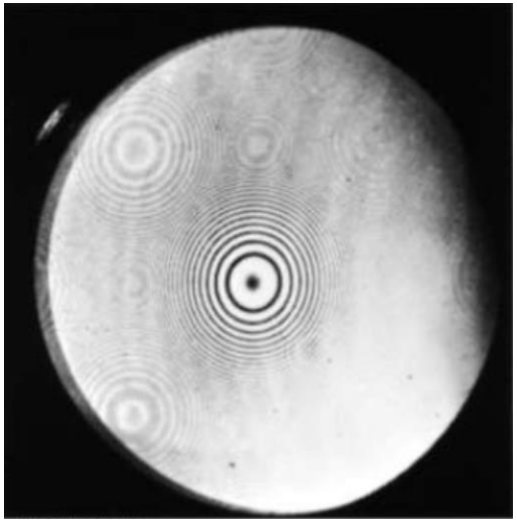
www.slideshare.net/chinkitkit/chapter-4b-interference

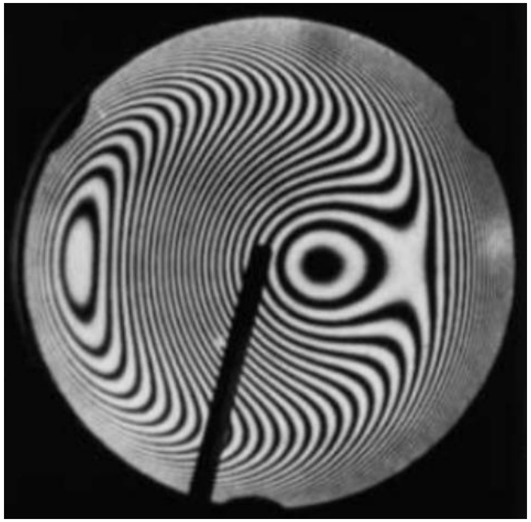
Soczewka - pierścienie Newtona



$$d = r^2/2R$$

$$r = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}}$$

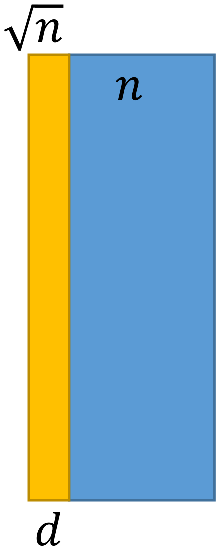




www.slideshare.net/chinkitkit/chapter-4b-interference

Interferencja

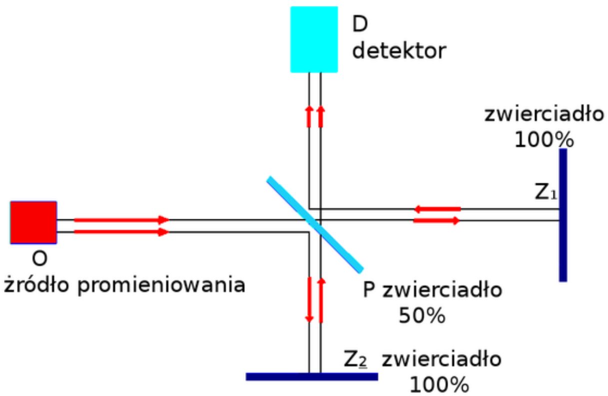
Warstwa antyrefleksyjna



$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}$$

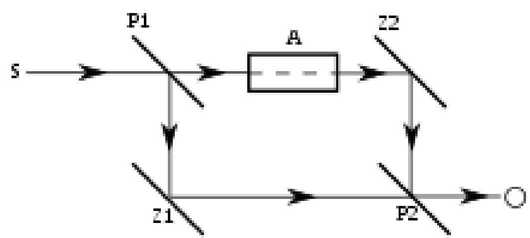
Interferometry

Michelsona

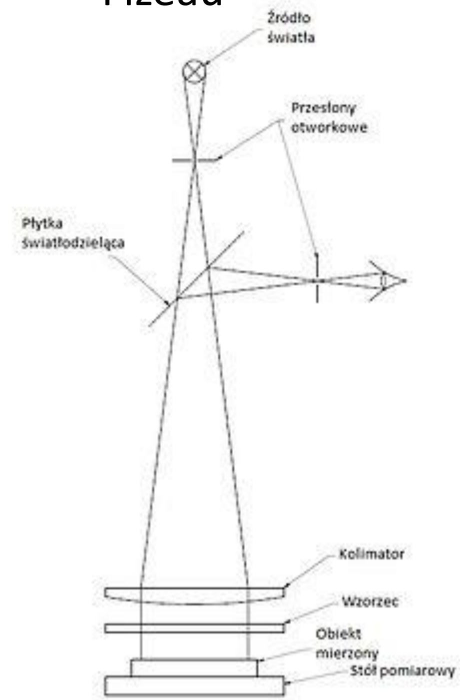


ilf.fizyka.pw.edu.pl/instrukcje/michelson/

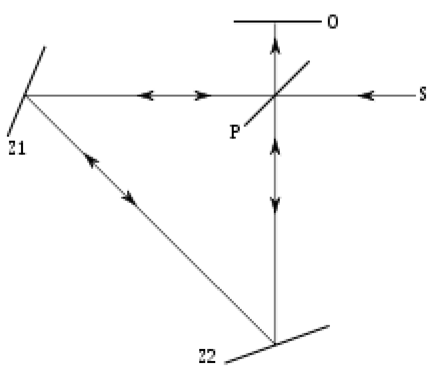
Macha-Zehndera

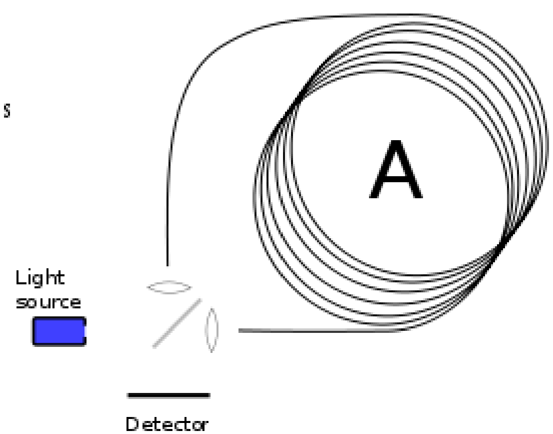


Fizeau



Sagnaca

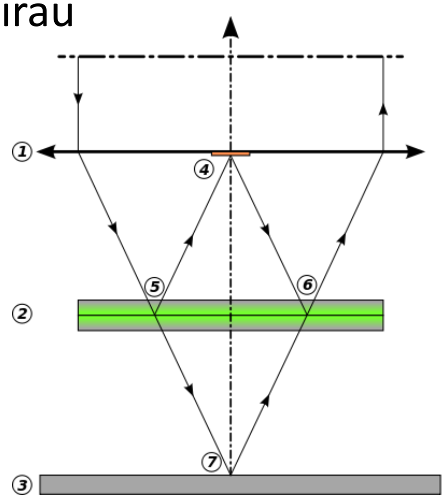




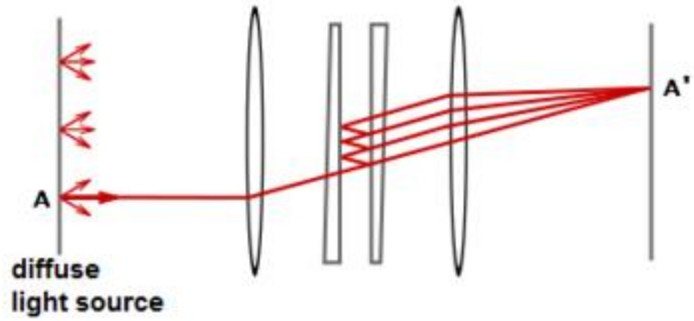
en.wikipedia.org

Interferometry

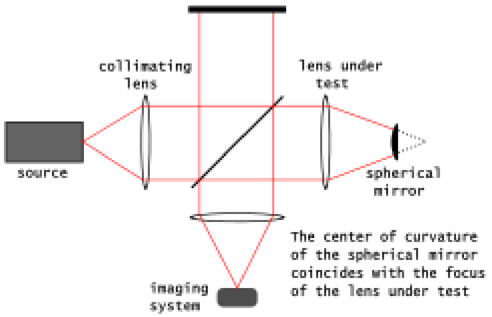
Mirau



Fabry-Perot



Twymana-Greena



en.wikipedia.org